

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência  
**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

## ESTUDO DA MODELAGEM DINÂMICA DO PÊNDULO SIMPLES<sup>1</sup>

**Saul Vione Winik<sup>2</sup>, Ricardo Klein Lorenzoni<sup>3</sup>, Antonio Carlos Valdiero<sup>4</sup>, Dyenifer Peralta Teichmann<sup>5</sup>, Victor Noster Kürschner<sup>6</sup>, Lucas Da Rosa Kieslich<sup>7</sup>.**

<sup>1</sup> Trabalho Científico da Descrição de Experiência Acadêmica

<sup>2</sup> Bolsista CNPq - GM, aluno do curso de Mestrado em Modelagem Matemática da UNIJUÍ, saul.winik@gmail.com

<sup>3</sup> Bolsista UNIJUÍ, aluno do curso de Mestrado em Modelagem Matemática da UNIJUÍ, ricolorenzoni@gmail.com

<sup>4</sup> Professor Doutor do Departamento de Ciências Exatas e Engenharias, Bolsista CNPq Produtividade DT, valdiero@unijui.edu.br

<sup>5</sup> Aluna do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUÍ, dyeniferpt@hotmail.com

<sup>6</sup> Bolsista Pibic/CNPq, aluno do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUÍ, vickurschner@hotmail.com

<sup>7</sup> Bolsista Pibic/CNPq, aluno do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUÍ, lucas.kieslich@hotmail.com

### INTRODUÇÃO

A fim de conhecer e entender melhor o mundo que nos rodeia, a humanidade frequentemente se dedica a estudar a fundo as nuances e as particularidades envolvidas no padrão de funcionamento de um sistema. Impulsionado por esta necessidade de entender o mundo que o cerca, Galileu Galilei observou a natureza das oscilações e a periodicidade do movimento pendular. O pêndulo simples consiste em um objeto que oscila em torno de um ponto fixo. [1]

Foram realizadas então modelagem matemática, simulação computacional e validação experimental de um sistema mecânico do tipo pêndulo simples, tendo como principal objetivo, apresentar a sequência de passos utilizados para a formulação matemática do modelo, simulação computacional do modelo desenvolvido e comparação dos resultados com os resultados obtidos em um experimento prático, apresentando também as melhorias desenvolvidas no modelo matemático para que o mesmo representa-se com fidelidade os dados obtidos na prática.

### METODOLOGIA

No estudo são apresentados três modelos matemáticos: o linear, não linear e não linear com mapa atrito do pêndulo simples utilizando os ângulos de 9° e 110° garantidos no experimento prático por meio de um sensor conectado a um computador.

Para melhor entendimento, deve-se esclarecer o comportamento do sistema mecânico do pêndulo simples. Basicamente o pêndulo simples é um objeto que está amarrado a um fio, sendo este preso em um anteparo superior, e através de uma variação na posição de repouso do corpo, o objeto começa a oscilar até retornar à posição de equilíbrio.

Para a validação do modelo proposto, foram obtidos os dados de uma bancada experimental do pêndulo simples que está instalada no Núcleo de Inovação em Máquinas Automáticas e Servo Sistemas (NIMASS) no campus da UNIJUÍ em Panambi - RS. Composta por uma haste a qual está preso o pêndulo de comprimento regulável, um sensor responsável por capturar a oscilação do pêndulo, uma placa eletrônica dSPACE e um computador ligado à bancada, onde são armazenados os dados obtidos pelo sensor.

Os dados obtidos pelos experimentos realizados foram processados e organizados em vetores, tornando-os assim manipuláveis pelo software MATLAB. Por meio da estrutura analisada pelo

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência  
**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

software, é possível gerar os gráficos relativos a cada experimento, desta forma, torna-se possível realizar as simulações computacionais em qualquer outro computador.

Desenvolvendo diagramas de blocos para realizar as simulações computacionais do sistema, foi utilizando o software MATLAB/SIMULINK, nos quais foi aplicado o método numérico Runge-Kutta de ordem 4 com passo de integração de 0,001.

#### MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

Analisando a dinâmica do pêndulo simples, identificou-se que o coeficiente de amortecimento viscoso, a força gravitacional, o comprimento da haste que suspende um corpo sólido, a massa deste corpo suspenso e o ângulo de inclinação inicial do deslocamento do pêndulo como sendo os parâmetros do sistema. E o deslocamento realizado pelo objeto do pêndulo e o tempo de oscilação foram identificados como as variáveis do sistema. [2]

Alguns parâmetros do sistema modelado foram obtidos através de medições no pêndulo real. Como a massa do objeto suspenso sendo medido através de uma balança de precisão resultando em 0,925 kg e a haste de ferro com um comprimento de 0,133 m.

Determinou-se também que o pêndulo está suspenso por um fio inextensível e que possui massa desprezível, o corpo que está fixo ao fio possui massa constante e nele atua uma força gravitacional também constante ocasionando um movimento do pêndulo simples ocorre no plano. A Figura 1 representa o diagrama de corpo livre do pêndulo estudado.

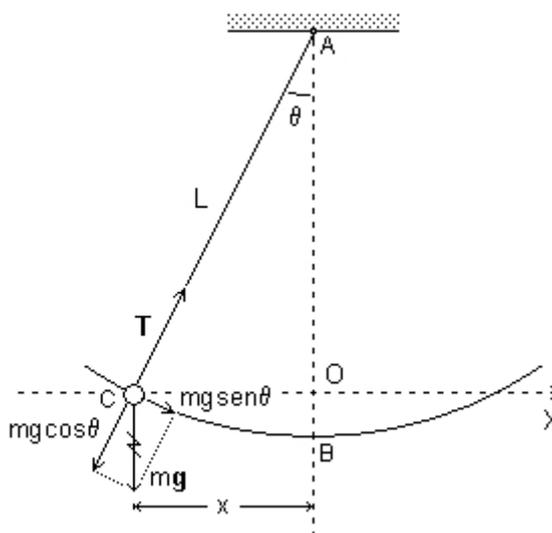


Figura 1- Diagrama de Corpo Livre do Pêndulo Simples com a Representação das Forças Atuantes

Determinadas as variáveis e parâmetros, pode-se iniciar a dedução do modelo matemático a partir do Princípio de D'Alembert. Assim quando somadas as forças atuantes no sistema e igualando ao cálculo da inércia multiplicado pela aceleração angular. Então acomodando a equação de forma que toda fique de um lado só da igualdade, encontrou-se a equação 1. [3]

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência  
**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{m.L^2} \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

Representando a equação do modelo matemático não linear do pêndulo simples. A mesma é considerada não linear por causa da componente seno na fórmula. Quando substituída a componente seno pelo valor 1, encontra-se a equação 2 que representa o modelo matemático linear do sistema.

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{B}{m.L^2} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0 \quad (2)$$

O terceiro modelo matemático utilizado no estudo do sistema do pêndulo simples é o modelo não linear com mapa de atrito. Dado pela equação 3 a seguir.

$$\ddot{\theta} + \left( T_c + (T_s - T_c) \cdot e^{-\left(\frac{u}{\alpha_{dys}}\right)^2} + B \cdot \text{abs}(u) \right) \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Este modelo está representado no diagrama de blocos montado no software SIMULINK apresentado na Figura 2.

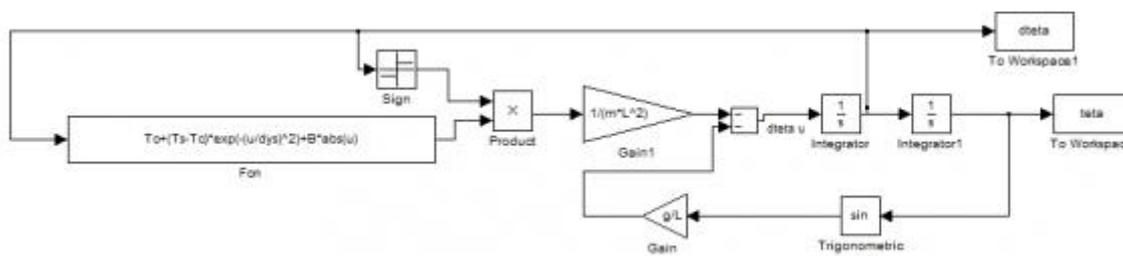


Figura 2 - Diagrama de Blocos do Modelo Matemático não Linear com Mapa de Atrito

## RESULTADOS

Após a identificação das equações que descrevem o sistema do pêndulo simples, podem ser definidas as variáveis do sistema, os parâmetros e suas variáveis, pode-se então calcular através do decremento logarítmico o valor inicial do coeficiente de amortecimento viscoso. A aceleração gravitacional local foi medida pelo MCT/ON Departamento de Geofísica. Os valores dos parâmetros calculados inicialmente são apresentados na Tabela 1 abaixo.

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência  
**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

Descrição do parâmetro	Notação	Valores
Massa do pêndulo	$m$	0.925 kg
Comprimento do pêndulo	$L$	0.133 m
Aceleração da gravidade	$g$	9.7906343 m/s <sup>2</sup>
Coefficiente de amortecimento viscoso inicial	$B$	0.0314 N.s/m

Tabela 1 - Valores adotados para os parâmetros do modelo matemático do pêndulo simples

Com os parâmetros pré-definidos anteriormente, deu-se início às simulações computacionais do modelo. Inicialmente foi representado, utilizando o modelo linear, o movimento do pêndulo simples com o ângulo de 9°, determinado anteriormente, para assim encontrar os valores para X1 e X2, que resultaram no valor de B inicial.

Com o valor de B calculado, foram executados os códigos que descrevem o movimento do pêndulo simples através dos modelos linear e não linear. Nesta simulação foi utilizado o segundo ângulo definido anteriormente para Teta, passando de 9° para 110°. A Figura 3 a seguir demonstra o comparativo entre o modelo matemático linear com o comportamento do pêndulo simples experimentalmente.

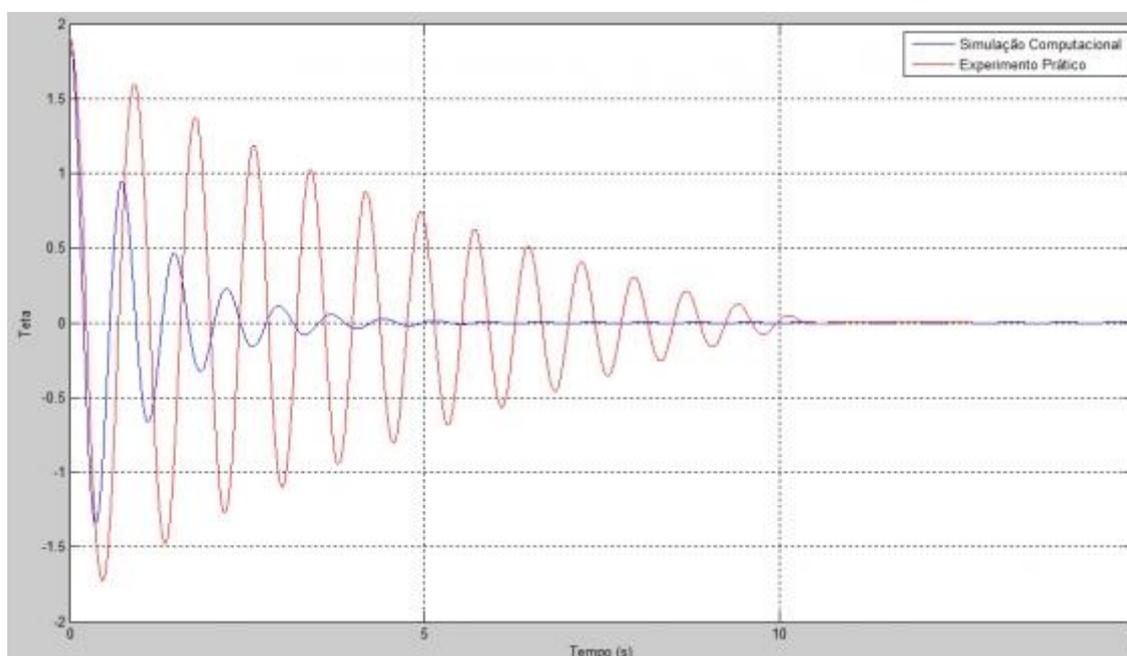


Figura 3 - Comparativo entre o comportamento do pêndulo simples realizado simulação computacional utilizando o modelo linear (em azul) e o experimento prático (em vermelho)

Notou-se que o comportamento calculado não representava fielmente o movimento executado pelo pêndulo simples no experimento prático. Realizou-se então a simulação computacional do diagrama

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência  
**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

de blocos apresentado anteriormente, onde foram determinados os valores para  $T_s$  e  $T_c$ . Estes parâmetros são, respectivamente, Atrito Estático e Atrito de Coulomb. Assim realizou-se a simulação com os valores de  $B=0,0314$ ,  $T_s=0,055$  e  $T_c=0,0275$ . Como o sistema representado no SIMULINK não respondeu como esperado, foram realizadas simulações computacionais para determinar os novos parâmetros de  $B$ ,  $T_s$  e  $T_c$ . Estes valores foram respectivamente 0,00153, 0,055 e 0,0275. A Figura 4 apresenta o resultado quando comparada com o movimento executado pelo pêndulo simples do experimento realizado.

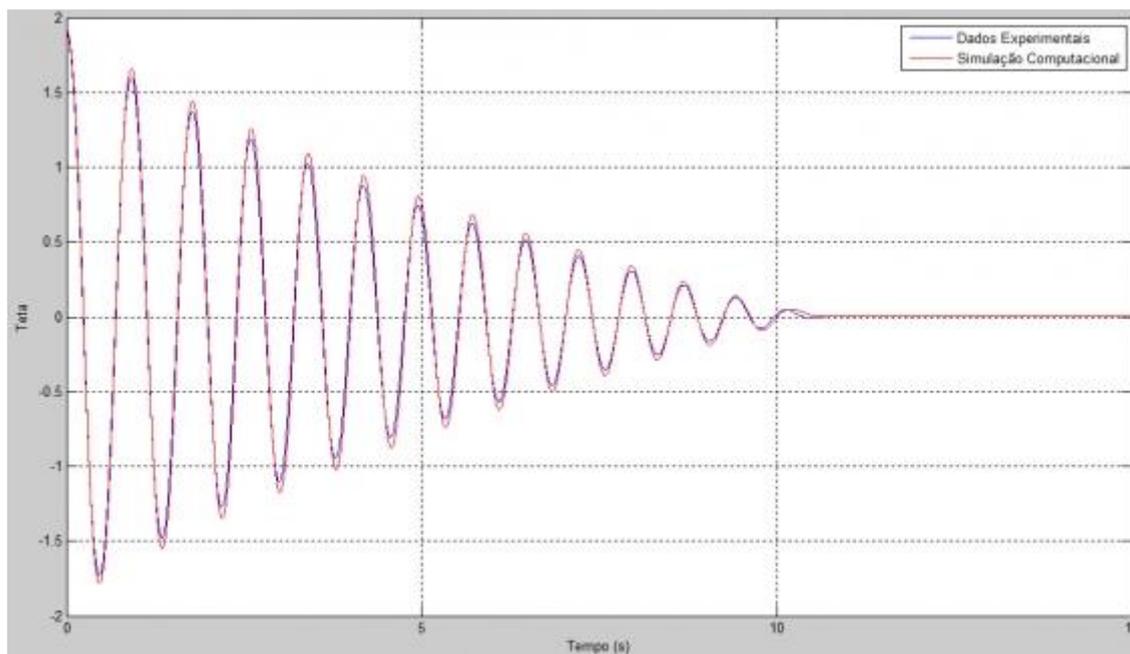


Figura 4 - Comparativo entre o comportamento do pêndulo simples realizado simulação computacional utilizando o modelo não linear com mapa de atrito (em azul) e o experimento prático (em vermelho)

## CONCLUSÃO

Embora os modelos matemáticos desenvolvidos para descrever o movimento do pêndulo simples tenham sido validados, sabe-se que os modelos possuem limitações definidas pelas hipóteses simplificadoras. Primeiramente, porque foi considerado nas hipóteses que o movimento do pêndulo acontece no plano e sabe-se que na realidade este movimento acontece no espaço. Depois, porque foi desenvolvido um modelo linear, apesar de já ter sido admitido que haja não linearidades relacionadas ao sistema e ainda por ter sido desprezada a massa da haste do pêndulo. No entanto os resultados obtidos no modelo não linear de ordem 2 com mapa de atrito apresentou uma alta acurácia e precisão. Isto se dá por causa das não linearidades ignoradas no desenvolvimento do modelo não linear empregado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALBARELLO, Janine da R.; DUARTE, Kelly P.; FAORO, Vanessa. Oscilação e Velocidade do Pêndulo Simples na Modelagem Matemática. Vivências: Revista Eletrônica de Extensão da URI. Santo Ângelo, V. 9, N. 17, p. 83-94, Outubro 2013. Disponível em:

**Modalidade do trabalho:** Relato de experiência

**Evento:** XXI Jornada de Pesquisa

<[http://www.reitoria.uri.br/~vivencias/Numero\\_017/artigos/pdf/Artigo\\_08.pdf](http://www.reitoria.uri.br/~vivencias/Numero_017/artigos/pdf/Artigo_08.pdf) > Acesso em: 18 abr. 2016.

[2] KLEIN, Mauri J; MARASCHIN, Leonardo B; VALDIERO, Antonio C; RASIA, Luiz A. Desenvolvimento de um Modelo Matemático com Atrito Não Linear para o Pêndulo Simples. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied And Computational Mathematics. Curitiba, V. 2, N.1, 2014. Disponível em < <http://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/download/278/280> > Acesso em: 20 abr. 2016.

[3] ZILL, D. G. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. São Paulo: Cengage Learning, 2011. 410 p.