



MODELAGEM MATEMÁTICA DA TEMPERATURA DE UM FLUIDO LÍQUIDO EM UMA GARRAFA TÉRMICA COM ISOLAMENTO A VÁCUO DE PAREDE DUPLA¹

Bruno Muraro Perondi², Leonardo Luan Moreira Serpa Sá³, Gabriel Kommers da Silva⁴, Maurício de Campos⁵, Moises Machado Santos⁶, Paulo Sérgio Sausen⁷

¹ Artigo Complementar ao trabalho da disciplina de Modelagem Matemática do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Matemática Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

² Aluno do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

³ Aluno do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

⁴ Aluno do Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Santa Maria

⁵ Professor da graduação e do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Matemática Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

⁶ Professor da graduação e do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Matemática Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

⁷ Professor da graduação e do Programa de Pós Graduação de Mestrado em Modelagem Matemática Computacional na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

RESUMO

Os copos e garrafas térmicas de isolamento a vácuo de parede dupla se tornaram famosos pela sua capacidade de conservar líquidos, como cerveja, água e refrigerantes em uma temperatura quente e/ou fria por longos intervalos de tempo. Neste trabalho foram utilizadas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) para criar um modelo matemático capaz de demonstrar a dinâmica de comportamento da temperatura de um fluido (água), sendo a lei de resfriamento/aquecimento de Newton utilizada como base. Para isso, foi considerado uma garrafa térmica de isolamento a vácuo de parede dupla, um sensor de temperatura à prova d'água e um microcontrolador Arduino Uno para extrair os dados do sensor. As leituras do sensor foram realizadas através do software Arduino IDE e as curvas do comportamento da temperatura foram realizadas utilizando o software MATLAB. Os resultados obtidos condizem com a literatura e mostram que o modelo de Newton pode representar o comportamento dinâmico da temperatura do fluido em uma garrafa térmica de isolamento a vácuo de parede dupla.

Palavras-chave: Modelo Matemático. Lei de Newton. Problema de Temperatura. Garrafa Térmica.

ABSTRACT

Double-walled vacuum-insulated thermal cups and bottles have become popular for their ability to maintain liquids, such as beer, water, and soft drinks, at a desired hot or cold temperature for extended periods. In this study, Ordinary Differential Equations (ODEs) were used to create a mathematical model capable of demonstrating the temperature dynamics of a fluid (water), based on Newton's law of cooling/heating. A double-walled vacuum-insulated thermal bottle, a waterproof temperature sensor, and an Arduino Uno microcontroller were



Este trabalho tem como objetivo investigar e analisar através de experimentos e simulações a capacidade de uma garrafa térmica de isolamento a vácuo de parede dupla em manter a temperatura de um líquido (água) quente. O experimento envolve o cálculo do tempo durante o qual o líquido se mantém em uma temperatura acima da mínima apropriada para consumo, ou seja, entre 60°C (temperatura mínima definida para consumo) e 100°C (temperatura mais comum de ebulição da água). Além disso, este estudo visa confirmar e validar o modelo matemático de Newton para o aquecimento por meio da comparação entre dados reais e simulações computacionais através do software MATLAB. Esta pesquisa exemplifica a aplicação das equações diferenciais e o processo de modelagem matemática de fenômenos físicos, sendo relevante para o âmbito didático de cursos de matemática e engenharia.

Para isto, o mesmo encontra-se dividido em cinco (5) itens, sendo a Introdução para contextualizar ao leitor o problema da pesquisa, a relevância do trabalho, e delinear os objetivos e a estrutura do artigo. A Metodologia, abordando os métodos e procedimentos utilizados para a pesquisa. O Embasamento Teórico, trazendo a revisão de literatura existente e fornecendo a base conceitual e a fundamentação para a pesquisa. Os Resultados e Discussões, onde são apresentados o desenvolvimento e as soluções encontradas e, por fim, as Considerações Finais, trazendo reflexões sobre o trabalho como um todo.

METODOLOGIA

Neste artigo é apresentado um método de abordagem bibliográfica, quantitativa e aplicada. A pesquisa fundamenta-se em informações provenientes de livros, dissertações, projetos, artigos e outros documentos escritos, complementando-se com a utilização de dados reais que proporcionam resultados precisos e próximos à realidade.

O primeiro passo neste estudo é realizar uma revisão bibliográfica. Abordando o método matemático de resfriamento/ aquecimento elaborado por Newton e sua aplicação. Nesse sentido, também são investigados os fundamentos teóricos que possibilitam a modelagem da curva de temperatura do fluido abordado (água).

A segunda parte do trabalho aborda o estudo, coleta de dados e desenvolvimento da modelagem da curva de temperatura do resfriamento da água dentro da garrafa térmica, baseando-se em modelos e cálculos previamente estabelecidos na literatura. Para isso, foi



selecionada uma garrafa térmica a vácuo de parede dupla comercial, um sensor de temperatura à prova d'água modelo DS18B20 e o microcontrolador Arduino Uno R3 para coletar os dados do sensor em tempo real. Em seguida, foram realizadas simulações computacionais para analisar o comportamento da temperatura da água durante o período de resfriamento dos 100°C até os 60°C através do software MATLAB/Simulink.

Por fim, são apresentados os resultados da pesquisa e são discutidas algumas considerações.

EMBASAMENTO TEÓRICO

A isolamento térmica é crucial para a entrega, produção, coleta ou armazenamento de calor a altas temperaturas. Atualmente, essa isolamento é obtida através do uso de materiais de baixa condutividade térmica, como lã de rocha, fibra de vidro, poliuretano, poliestireno e aerogel. No entanto, desempenhos melhores podem ser alcançados ao adotar a tecnologia a vácuo de parede dupla, pois assim as perdas por condução são eliminadas, e o mecanismo de transferência de calor por radiação representa o único mecanismo de perda (CAPOLUPO et al., 2024).



Figura 1 - Garrafa térmica a vácuo de parede dupla. **Fonte:** Google (2024).



De acordo com Corrêa e Aguirre (2004), um modelo matemático de um sistema real é uma representação matemática análoga que captura algumas das características observadas de tal sistema. Esses modelos ajudam a entender o funcionamento do sistema ou a prever como ele deve se comportar, permitindo ajustes na estrutura ou no comportamento do mesmo conforme a necessidade, sendo que quanto mais precisas as condições de operação, mais próximo da realidade será o modelo elaborado.

Existem várias abordagens para criar modelos matemáticos, incluindo modelagem caixa-branca, caixa-preta e caixa-cinza (CORRÊA; AGUIRRE, 2004). Para este trabalho, está sendo considerada a modelagem caixa preta, não exigindo conhecimento detalhado do sistema ou das leis físicas que o regem.

■ Caixa-Preta

- Refere-se a testes que são conduzidos na interface do software. Um teste de caixa-preta examina algum aspecto fundamental do sistema pouco se preocupando com a estrutura lógica interna do software.



Figura 2 - Descrição do modelo caixa-preta. **Fonte:** Google (2024).

Vários modelos são capazes de simular matematicamente a troca de calor entre os diferentes estados físicos da matéria (sólido, líquido e gasoso), como as equações de Fourier, que modela como o calor se propaga em sólidos, como em paredes de edifícios ou em barras metálicas, e o modelo de troca de calor radiativo, que utiliza as leis de Stefan-Boltzmann e as equações de radiação de corpo negro (KÉZI, 2023). Para este estudo, será contemplado o modelo de resfriamento de Newton. Tal modelo envolve a análise da perda de calor de objetos para seus arredores utilizando equações diferenciais separáveis, tornando-se aplicável em vários cenários, como o resfriamento de metal em um ambiente amplo ou o de café ou água em uma sala (KÉZI, 2023).



RESULTADO E DISCUSSÕES

Primeiramente, foi elaborado um código (*script*) no software Arduino IDE possibilitando receber os dados do sensor de temperatura à prova d'água DS18B20 através do microcontrolador Arduino Uno R3. Feito isto, o circuito foi montado conforme figuras 4-a e 4-b.

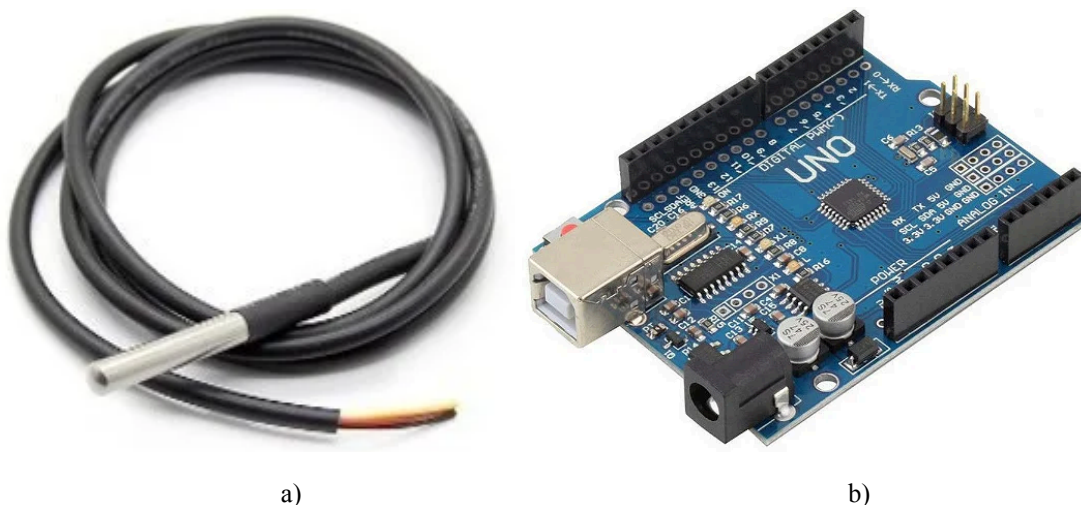


Figura 3-a) Sensor de temperatura à prova d'água modelo DS18B20. **Fonte:** Amazon (2024). 3-b) Microcontrolador Arduino Uno R3. **Fonte:** Amazon (2024).

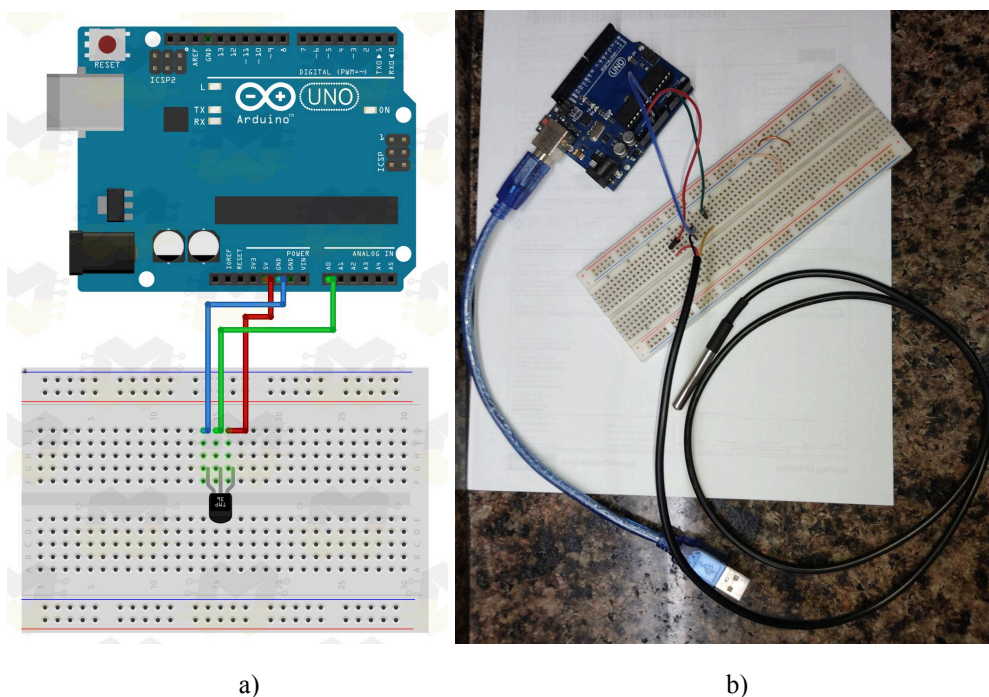


Figura 4-a) Montagem da protoboard idealizada. **Fonte:** Blog Masterwalker (2024). 4-b) Montagem da protoboard prática. **Fonte:** Autor (2024).



Como teste, foi lido o valor da temperatura ambiente, valor que coincidiu com o do termômetro de parede existente no local de teste e, por questão de reforço, também foi medida a temperatura de um líquido levemente aquecido, cuja temperatura um termômetro digital marcou $46,3^{\circ}\text{C}$ e o sistema de medição de temperatura elaborado pelo autor marcou $46,4^{\circ}\text{C}$. Isto é, o sistema apresentou uma diferença na medida de temperatura aferida por ele e na do termômetro digital de $0,1^{\circ}\text{C}$, diferença que, para os objetivos deste trabalho, é insignificante, ainda mais levando em conta o fato de que os equipamentos de medição de temperatura também apresentam erros de $\pm 0,5^{\circ}\text{C}$, o que torna o sistema projetado confiável (AGENCIAPLIM_ADFG5, 2018).

Para se obter os dados experimentais, os testes foram realizados em ambiente climatizado a uma temperatura constante de aproximadamente 22°C e duraram cerca de cinco dias. Para o experimento, a água foi aquecida até uma temperatura de 100°C através de um ebulidor de água elétrico e, posteriormente, foi deixada resfriar até a temperatura de 60°C , sendo este procedimento repetido três vezes e extraído a média aritmética dos resultados para se obter uma precisão maior para o modelo.



a)



b)

Figura 5-a) Ebulidor de água elétrico comercial. **Fonte:** Amazon (2024). 5-b) Equipamentos utilizados para teste. **Fonte:** Autor (2024).

É importante notar que para tampar a garrafa térmica durante os testes, foi criado uma espécie de rolha de isopor com um furo no meio para possível locação do sensor de



temperatura utilizado para aferir as medições e, ainda, foi utilizado uma fita isolante térmica para maximizar a isolamento e mitigar os efeitos de convecção térmica com o ambiente. Isto foi feito levando em consideração o fato de que a garrafa térmica possui uma tampa projetada especificamente para que isso não ocorra, mas que não possibilita a aferição de temperatura através dos equipamentos disponíveis para este estudo.

Com tudo montado e as variáveis de controle definidas, os experimentos foram realizados e os resultados podem ser observados no quadro 1.

Quadro 1 - Aferições da temperatura de hora em hora dentro dos limites experimentais definidos (entre 60°C e 100°C). **Fonte:** Autor (2024).

Tempo (hora)	Temperatura (°C)	Tempo (hora)	Temperatura (°C)	Tempo (hora)	Temperatura (°C)
0	100	12	83	24	69,6
1	98,2	13	81,9	25	68,6
2	96,8	14	80,3	26	67,6
3	95,4	15	79	27	66,8
4	93,9	16	78,3	28	65,8
5	92,4	17	76,8	29	65
6	91	18	76	30	63,6
7	89,6	19	74,8	31	63,1
8	88,2	20	73,8	32	62,9
9	87	21	72,9	33	61,4
10	85,6	22	71,5	34	60,5
11	84,3	23	70,5	35	60

Com os dados experimentais coletados e tabulados, parte-se para a modelagem destes dados. Para isto, o modelo considerado nesta pesquisa utiliza a metodologia empregada no modelo de resfriamento/aquecimento elaborado por Newton. De acordo com Kézi (2023), o modelo de resfriamento/aquecimento de Newton afirma que a taxa de variação da



temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do meio ao seu redor, ou seja, a temperatura ambiente. Isso pode ser expresso pela equação:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

sendo que a solução desta equação diferencial que constitui o modelo de resfriamento/aquecimento de Newton é dada por:

$$T = Ce^{\pm kt} + T_m$$

onde dt/dT é a taxa de variação da temperatura do corpo de prova em relação ao tempo, T é a temperatura do corpo de prova em graus celsius ($^{\circ}\text{C}$), T_m é a temperatura do ambiente em graus celsius ($^{\circ}\text{C}$), t é o tempo em minutos (min), C é a constante que depende da condição inicial da temperatura do corpo ($^{\circ}\text{C}$) e k que é a constante de proporcionalidade, que representa a taxa de resfriamento (negativo) ou aquecimento (positivo) e é dependente das propriedades do corpo e do meio.

Com esta solução, é possível utilizar os dados experimentais de temperatura e tempo para determinar o valor das constantes C e k . Com essas constantes definidas, é possível estimar o tempo necessário para que a água atinja qualquer temperatura almejada e também pode-se gerar a curva de resfriamento da água ao decorrer do tempo.

Utilizando os dados tabelados no quadro 1, obtém-se que para este estudo a constante C equivale à temperatura de 78°C , enquanto a constante de proporcionalidade k possui o valor de $0,0003424394$. Com essas informações, obteve-se a curva demonstrada na figura 6.

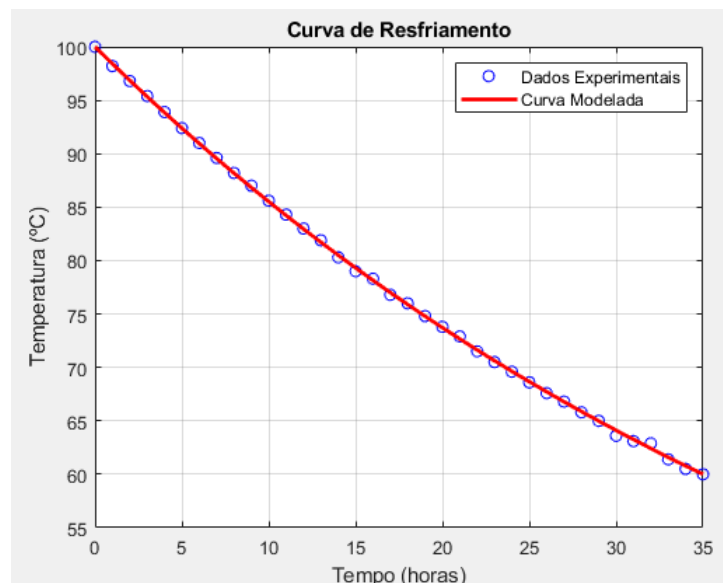


Figura 6 - Curva de resfriamento modelada junto aos dados experimentais. **Fonte:** Autor (2024).



Como pode ser observado na figura 6, o modelo projetado funciona como o esperado e apresenta resultados satisfatórios, visto que a curva de resfriamento do líquido representa aquilo que foi observado nos experimentos realizados com a garrafa térmica de isolamento a vácuo de parede dupla. Para demonstrar melhor o comportamento da curva de resfriamento durante o tempo, foi aumentado o tempo de simulação para 300 horas, para que esta se aproxime da temperatura ambiente.

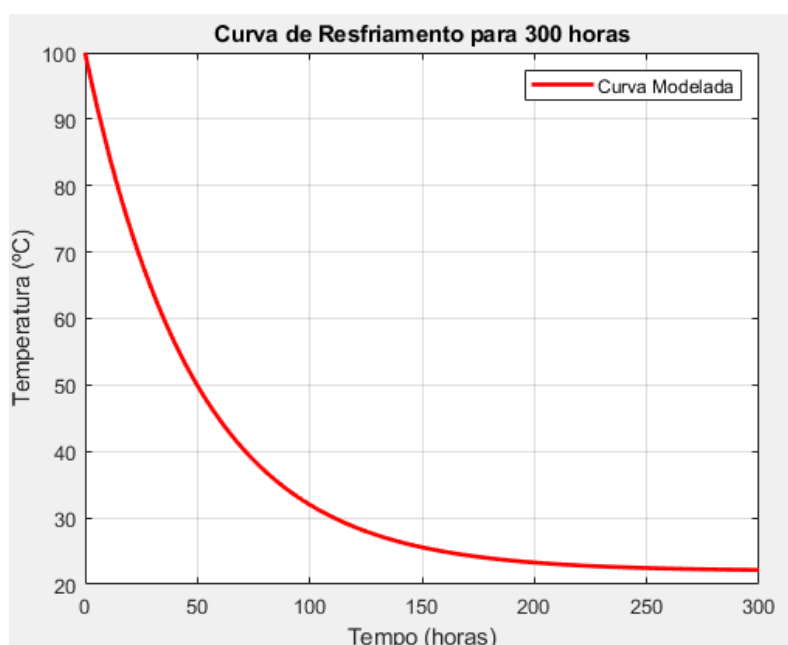


Figura 7 - Curva de resfriamento do líquido em 300 horas de simulação. Fonte: Autor (2024).

Com o aumento do tempo de simulação, observa-se que a curva torna-se basicamente constante à medida que se aproxima da sua temperatura limite, que são os 22°C. Isto decorre do fato de que o modelo de resfriamento/aquecimento elaborado por Newton utiliza um decaimento exponencial, e por isso a temperatura do líquido nunca será exatamente a mesma que a temperatura ambiente, acarretando em uma limitação para esse modelo (STEWART; CLEGG; WATSON, 2020).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo projetado atende aos objetivos propostos por este trabalho e representa com acuidade a metodologia de resfriamento de um fluido líquido. A simulação via software apresentou comportamento similar aos dados experimentais, sendo que as diferenças entre



simulação e aferição real podem ser atribuídas à consideração da temperatura ambiente como constante, quando na realidade essa varia mesmo com o ambiente climatizado, e também aos equipamentos utilizados, visto que todos possuem uma pequena faixa de erro tornando o resultado muito próximo, porém nunca 100% preciso e condizente a realidade (OLU-LAWAL et al., 2024).

Ainda, os resultados obtidos demonstram que as equações diferenciais, tais como as EDOs, são capazes de auxiliar no entendimento de várias atividades cotidianas, fornecendo modelos que remetem com precisão a fenômenos reais, tal como o resfriamento de um fluido. Porém, é importante notar que os modelos, assim como o utilizado neste trabalho, possuem limitações, e por isso é necessário realizar experimentos e simulações para confirmar a veracidade do modelo e se este atende ao que está sendo proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGENCIAPLIM_ADFG5. **Guia Prático para determinar o erro máximo permissível de um termômetro - ACC Metrologia.** Disponível em: <<https://accmetrologia.com.br/guia-pratico-para-determinar-o-erro-maximo-permissivel-de-um-termometro/>>. Acesso em: 4 ago. 2024.

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte.** 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

CAPOLUPO, F. et al. **Design and thermal test of high-vacuum insulator for heat delivery pipes.** Journal of Physics Conference Series, v. 2685, n. 1, p. 012057–012057, 1 jan. 2024.

CORRÊA, M. V.; AGUIRRE, L. A. **Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados.** Controle & Automação, v. 15, n. 2, p. 109–126, 1 jun. 2004.

KÉZI, Csaba. **Teaching the Analysis of Newton’s Cooling Model to Engineering Students.** International Journal of Engineering and Management Sciences, 2023, 8.2: 63-68, 2023.



OLU-LAWAL, K. A. et al. **Innovative material processing techniques in precision manufacturing: a review.** International Journal of Applied Research in Social Sciences, v. 6, n. 3, p. 279–291, 17 mar. 2024.

STEWART, J.; CLEGG, D.; WATSON, S. **CALCULUS : early transcendentals.** S.L.: Cengage Learning, 2020.

ZHENG, B. **Ordinary Differential Equation and Its Application.** Highlights in science, engineering and technology, v. 72, p. 645–651, 15 dez. 2023.