

TRANSFORMACIÓN EN VARIABLE COMPLEJA PARA LA RESOLUCION DE LA ECUACION DEL CALOR EN DOS DIMENSIONES¹

Maria Del Carmen Ibarra², Jorge Omar Morel³.

¹ Trabajo realizado en el marco del proyecto de Investigación Matemática Aplicada para Ingeniería. Diseño e implementación de propuestas didácticas contextualizadas. Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (Argentina)

² Profesora del Departamento de Matemática- Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
ibarra@fio.unam.edu.ar

³ Profesor del Departamento de Matemática- Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones
omar.morel@gmail.com

Introducción

La Matemática es uno de los ejes principales de la formación del Ciclo Básico en carreras de Ingeniería y los estudiantes están ávidos de aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos en los primeros tramos de la carrera a situaciones y/o problemas reales, es así que la disciplina despliega su verdadero potencial cuando se la presenta vinculada a áreas específicas de la Ingeniería 2, 3. En el presente trabajo se plantea el análisis y resolución de la Ecuación del Calor de Fourier, como problema interdisciplinario de las áreas Matemática, Física y Termodinámica, de manera que el estudiante pueda apreciar el carácter transversal de la Matemática en la carrera. Esta ecuación es un modelo matemático para la transmisión del flujo térmico en el interior de cuerpos sólidos y viene representado por una Ecuación Diferencial Parcial (EDP) 4, 5, 8 para cuya resolución se ha optado por el Análisis en Variable Compleja 7, para que el estudiante visualice el potencial de esta rama del Análisis. Cabe destacar que esta EDP también puede ser resuelta mediante Análisis en Variable Real 4.

Metodología

Esta presentación del planteo y resolución de la Ecuación del Calor, se realiza en la cátedra de Matemática Aplicada, correspondiente al cuarto semestre de carreras de Ingeniería, de manera que los estudiantes poseen conocimientos básicos de Física y Cálculo en Variable Real y en esta asignatura se presenta el Análisis en Variable Compleja, herramienta con la cual se aborda el problema planteado.

Para el trabajo en el aula el alumno dispone de una Guía Didáctica teórico – práctica elaborada por los docentes, la cual se inicia con una breve descripción del contexto histórico (S XIII y XIV) en el cual se ha gestado este modelo, así como los aportes de los científicos más destacados de la época 1, 6. Posteriormente se realiza la deducción de la EDP que representa el modelo, en una, dos y tres dimensiones; y se analiza la dependencia del tiempo, como así también el

Modalidade do trabalho: Relatório técnico-científico

Evento: XVIII Jornada de Pesquisa

régimen estacionario. Luego se aborda la resolución de la EDP mediante métodos de Variable Compleja, utilizando conceptos como funciones armónicas y analíticas, gradiente, curvas ortogonales y transformaciones (mapeo). Se desarrolla en clase un ejemplo completo de la transmisión de calor en el interior de un cuerpo cilíndrico en régimen permanente (Ecuación de Laplace) y considerando solamente las dimensiones de su sección transversal, de manera que la temperatura (u) dependerá de dos variables independientes ($u(x,y)$), esto es conocido como Problema de Dirichlet $\#61531;5\#61533;$, el cual consiste en un problema con valores en la frontera $\#61531;4, 5\#61533;$ donde hay que determinar una función armónica en cierta región del plano, conociendo los valores que la misma toma en la frontera de dicha región, los cuales son datos del problema. Para hallar la función de temperatura es necesario resolver una EDP de segundo orden, para lo cual se realiza una transformación o mapeo en el plano complejo, con el objetivo de llevar la región original (comprendida entre dos cilindros tangentes en un punto) a una más sencilla, para luego mediante una transformación inversa, encontrar la solución buscada. La transformación apropiada en esta situación es del tipo inversa, que mapea las circunferencias (sección transversal de los cilindros) en dos semirrectas y llevando así la región original a una franja infinita de ancho constante, cuya resolución en el plano complejo es sencilla. Posteriormente se realiza la transformación inversa correspondiente y se encuentra la función de temperatura buscada. En esta instancia también se aplican conceptos de Vector Gradiente y Funciones Armónicas Conjugadas, para encontrar la dirección del flujo térmico, coincidente con la normal a las isotermas.

El desarrollo del ejemplo citado de manera completa, se realiza en clases teórico- prácticas, donde los docente guían el trabajo, con explicaciones de conceptos y ampliación de desarrollos teóricos; los alumnos trabajan de forma grupal, haciendo sus aportes y producciones. La Guía Didáctica está disponible con varios días de antelación a la clase y posee varias referencias bibliográficas y virtuales, de manera que el estudiante interesado puede ampliar la información.

En la última parte de la Guía Didáctica están propuestas las actividades para el estudiante, consistentes en la resolución de la Ecuación del Calor en regiones de diferentes configuraciones y con distintas condiciones de frontera; además se plantea un cuestionario teórico.

A modo de Conclusión

La Ecuación del Calor es un modelo físico matemático muy apropiado para la presentación de una Matemática en Contexto $\#61531;2, 3\#61533;$ pues convergen en su resolución conceptos de Física, Mecánica y Termodinámica, unidos por el hilo conductor de la Matemática.

Este tipo de problemas incentiva a los estudiantes, ya que tienen la posibilidad de apreciar la Matemática asociada a disciplinas específicas de la carrera. Durante el trabajo en el aula se puede apreciar el interés de los estudiantes en la riqueza y creatividad de sus producciones, a diferencia de lo que sucede con la resolución de ejercicios rutinarios, donde el trabajo es más monótono.

Este tipo de actividades demanda al equipo docente mucho tiempo y trabajo, principalmente en la selección de los temas y la elaboración del material. Otro punto a tener en cuenta es que si bien en el material se daban numerosas referencias bibliográficas y direcciones de sitios web para ampliar el

SALÃO DO CONHECIMENTO

UNIJUÍ 2013
Ciência • Saúde • Esporte



Modalidade do trabalho: Relatório técnico-científico

Evento: XVIII Jornada de Pesquisa

tema, han sido muy pocos los estudiantes interesados en efectuar esta tarea, la mayoría de ellos se ha conformado con lo que estaba en la Guía Didáctica.

Dada la extensión y complejidad del tema no se pretende hacer un tratamiento exhaustivo del mismo, lo cual además escapa a los objetivos de la asignatura; se anhela en cambio, presentar una Matemática en Contexto, que despierte el interés de los alumnos y les permita visualizar algunas aplicaciones de esta disciplina en lo que será su futura profesión. Existe un objetivo aún más ambicioso que perseguimos los docentes que emprendimos este proyecto y es desarrollar e incentivar en nuestros alumnos el espíritu de investigación.

Palabras clave: Matemática en Contexto, Ingeniería, Ecuaciones Diferenciales Parciales, Funciones Armónicas, Transformación Inversa.

Referencias Bibliográficas

- 1 ALMIRA, J.M. Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del Análisis de Fourier, 2000
- 2 CAMARENA GALLARDO, P. La matemática en el contexto de las ciencias. Memorias del III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas. Perú, 2008
- 3 CAMARENA GALLARDO, P. La matemática en el contexto de las ciencias – Fase Didáctica; CLAME – ALME. Vol. 16. Tomo I. Chile, 2003
- 4 NAGLE, K.; SAFF, E.; SNIDER, A. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. 3ra. Edición. Pearson Educación. México, 2001
- 5 O'NEIL, P. Matemáticas avanzadas para Ingeniería. 6ta. Edición. Cengage Learning. México, 2009
- 6 ORTIZ MELGUIZO, A. Estudio sobre Joseph Fourier. Univesridad Autónoma de Madrid, 2006
- 7 WUNSCH, D. Variable Compleja con aplicaciones. 2da. Edición. Pearson Educación. México, 1999
- 8 ZILL, D.; CULLEN M. Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera. 7ma. Edición. Cengage Learning. México, 2009

