***Evento:** XXVIII Seminário de Iniciação Científica*

UM ESTUDO SOBRE A TRANSFORMADA DE FOURIER: O TEOREMA DA INVERSÃO[1]

A STUDY ON THE FOURIER TRANSFORM: THE INVERSION THEOREM

Gerson Freitas Luz[2], Juliana Nunes[3]

[1] Projeto de pesquisa desenvolvido na Universidade Federal do Rio Grande.
[2] Bolsista; estudante do curso de Matemática Licenciatura pela Universidade Federal do Rio Grande, Bolsista EPEC/FURG.
[3]Professora de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande.

RESUMO
O estudo da Transformada de Fourier advém da Série de Fourier, que por sua vez é uma ferramenta fundamental para resolver problemas como os de condução de calor. Nesse trabalho, apresentamos um estudo sobre a Transformada de Fourier e suas propriedades, visando compreender o comportamento da transformada no espaço de Schwartz. Além disso, outros objetivos como a inserção na pesquisa matemática e o estudo de um tópico de matemática a nível de mestrado. A metodologia utilizada foi a de seminários semanais com a orientadora, antecedidos por pesquisa e estudo individual do tópico. Iniciamos definindo a transformada de Fourier e com isso, estudamos algumas propriedades importantes. O problema fundamental da teoria é recuperar a função f de sua transformada em um espaço especial conhecido como Espaço de Schwartz provando a Fórmula de Inversão. Com esse estudo, portanto, foi possível conhecer alguns resultados de Transformada de Fourier e compreender melhor sua importância na matemática.

Palavras-chave: Transformada de Fourier. Espaço de Schwartz. Fórmula de Inversão.

INTRODUÇÃO

No estudo do tópico Séries de Fourier, aprendemos a escrever funções periódicas utilizando as funções trigonométricas senos e cossenos. Quando o período da função representada é alongado e permite a aproximação do infinito, temos a Transformada de Fourier, que surge naturalmente como uma extensão do conceito de série de Fourier. Logo, é uma transformação matemática que decompõe funções dependendo do espaço ou do tempo em funções dependendo da frequência espacial ou temporal.

Temos como exemplo a expressão de um acorde musical em termos dos volumes e frequências de suas notas constituintes. Além disso, temos aplicações em ondas sonoras, campos eletromagnéticos, elevação de uma colina versus localização, um gráfico de VSWR versus frequência, preço de um produto versus tempo.

Nesse trabalho fizemos um estudo introdutório sobre a transformada de Fourier e suas propriedades, a fim de compreender o comportamento da transformada no espaço de Schwartz. Na seção de resultados, descreveremos o teorema principal, que permite entender a conhecida Fórmula da inversão.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada foi seminários semanais. No primeiro momento o estudo individual do tópico da semana e no segundo momento uma apresentação do seminário referente ao assunto escolhido, em que foi discutido cada resultado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A transformada de Fourier de uma função f pode ser definida da seguinte maneira: se $f: R \to C$ for integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ e se a integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \lim_{a\to-\infty\, b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < +\infty,$$

existir, então a função $\hat{f}: R \to C$ dada por:

$$\hat{f}(\xi) = (Ff)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

estará bem definida para qualquer $\xi \in R$ e será a Transformada de Fourier de f.

Através dessa definição podemos obter propriedades no espaço L^1 ligadas a linearidade, conjugado, translação e semi-norma. Além disso, estudamos resultados que provam que as transformadas de Fourier de funções no espaço L^1 são uniformemente contínuas em R e seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b]$, resultando em $\hat{f}(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to +\infty$.

O problema fundamental da teoria é recuperar a f de sua transformada para o espaço especial de funções no qual provaremos a Fórmula de Inversão. Esse espaço apontado é o espaço de Schwartz, o qual é a coleção das funções $f: R \to C$ infinitamente diferenciáveis em R tais que, quaisquer que sejam $\alpha, B \in Z^+$, existe uma constante $C_{\alpha,B}$ com:

$$\left|x^{\alpha} f^{(\beta)}(x)\right| \le C_{\alpha,\beta},\ \forall x \in R,$$

logo, $f(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ mais rápido do que o inverso de qualquer polinômio, o que implica em $S \subseteq L^1$.

Vimos que funções f que estão no espaço de Schwartz S possuem $f^{(n)} \in S$ e $\left(f^{(n)}\right)^{\wedge}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$. Esta propriedade é bastante relevante, visto que suas consequências nos permitem transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e reduzir equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias.

Para obter o teorema principal, primeiro foi visto que se $f \in S$, a transformada de Fourier da f também está em S e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi.$$

Com esse resultado foi possível, portanto, mostrar que a transformada de Fourier F define uma bijeção linear de S em si mesmo e sua inversa é dada por:

$$(F^{-1}f) = f^{\vee}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi, \, x \in R, \, f \in S.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Portanto, o estudo da Transformada de Fourier possibilitou compreender seus resultados e sua importância na matemática. O contato com esse tópico gerou não só um novo aprendizado, mas também um amadurecimento matemático, visto os pré-requisitos que foram necessários para compreender o resultado principal. Sendo assim, o trabalho ajudou a ter contato com a pesquisa e entender como a iniciação científica pode agregar na formação do bolsista.

AGRADECIMENTOS

“Apoio: PDE/FURG2021”.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

IÓRIO, Valéria de Magalhães. EDP: Um curso de Graduação, ed. 4. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

IÓRIO, Valéria de Magalhães e IÓRIO, Júnior Rafael. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 1988.