



Evento: XXVI Jornada de Pesquisa

## MODELAGEM MATEMÁTICA DO TEMPO DE VIDA DE BATERIAS ATRAVÉS DE UM MODELO HÍBRIDO <sup>1</sup>

MATHEMATICAL MODELING OF BATTERIES LIFE TIME THROUGH A HYBRID MODEL

**Julia Dammann<sup>2</sup>, Airam Teresa Zago Romcy Sausen<sup>3</sup>, Marcia de Fátima Brondani  
Binelo<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> Projeto de Dissertação do curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, desenvolvido na Unijuí;

<sup>2</sup> Bolsista CAPES, estudante do curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, UNIJUI;

<sup>3</sup> Professora do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UNIJUI;

<sup>4</sup> Professora do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, UNIJUI;

### RESUMO

As baterias são responsáveis por fornecer energia para o funcionamento dos dispositivos móveis e com isso têm sido objeto de diversos estudos em busca do aperfeiçoamento dessas tecnologias. A utilização desses dispositivos está condicionada ao estado de carga da bateria a necessidade de prever seu tempo de vida. Uma das ferramentas para prever o tempo de vida de baterias é a modelagem matemática. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é realizar a modelagem matemática do tempo de vida de baterias por meio de um modelo híbrido. Para isso, é realizado um estudo teórico sobre as baterias e sobre o modelo híbrido de Kim, e dados experimentais de descarga de baterias são comparados à uma simulação do modelo híbrido de Kim, apresentando um erro relativo de 1,15%.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Baterias. Modelo Híbrido.

### ABSTRACT

Batteries are responsible for providing energy for the operation of mobile devices and, therefore, they have been the object of several studies seeking to improve these technologies. The use of these devices depends on the state of battery charge and the need to predict its lifetime, that is, for how long the device can be operational. One of the tools for predicting battery life is mathematical modeling. In this sense, the objective of this work is to perform the mathematical modeling of battery life using a hybrid model. For this, a theoretical study on batteries and on the different hybrid models is carried out, emphasizing the Kim model, and experimental data of battery discharge is compared with a simulation of the Kim hybrid model, presenting a relative error of 1.15%.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Batteries. Hybrid Model.



## INTRODUÇÃO

Muitas são as opções de dispositivos que utilizam baterias recarregáveis como fonte de energia. Inúmeras pesquisas têm sido desenvolvidas sobre diversos aspectos que podem interferir diretamente no desempenho da bateria durante o seu uso, tais como, a capacidade e o número de ciclos (Binelo; Sausen; Sausen, 2017). Dentre essas baterias, as de Lítio Íon Polímero (Li-Po) acabam se destacando e são muito empregadas, uma vez que possuem alta densidade energética (Binelo; Sausen; Sausen, 2017, Ashwin; Chung; Wang, 2016, Gebbie et al., 2013), massa reduzida, longa vida útil e não são suscetíveis ao efeito memória, portanto, são o foco de estudo desta pesquisa (Bohacek; Raudensky; Karimi-Sibaki, 2019).

Alguns dispositivos móveis (como por exemplo: *mobile phone*, *smart watches*, *tablets* e *laptops*) tem demandado maior quantidade de energia armazenada (Broussely et al., 2001). Isso acontece em razão do aprimoramento desses dispositivos, maior quantidade de funções que desempenham, assim como pelo uso crescente em diferentes atividades do dia-a-dia.

Os ciclos de vida são caracterizados pela quantidade de descargas e recargas que uma bateria pode suportar, antes de sua capacidade começar a reduzir significativamente (Clemm et al., 2016). Segundo Jafari, Khan e Gauchia (2018), essa redução de capacidade afeta a conduta de armazenamento e utilização. Além das características de uso, essa perda também está relacionada ao período de armazenamento, intitulado de envelhecimento do calendário, sendo uma função da temperatura, do estado de carga (i.e., State Of Charge - SOC) e do tempo.

Outro parâmetro importante é o tempo de vida das baterias, que é por definição o tempo que a mesma leva para atingir um determinado nível de capacidade de carga, na qual a bateria fica incapaz de fornecer energia elétrica ao sistema. O tempo de vida também tem a função de informar ao usuário o tempo que o dispositivo ficará operacional, sem a necessidade de uma recarga.

Uma ferramenta muito importante que auxilia na determinação do tempo de vida de baterias é a modelagem matemática, que por meio de diferentes modelos simula um processo de descarga real, assim como também captura as características não lineares do seu funcionamento. Entre os modelos matemáticos presentes na literatura, destacam-se os modelos eletroquímicos (Doyle; Fuller; Newmann, 1993, Jorgerden; Haverkort, 2008), os modelos elétricos (Chen; Rincón-Mora 2006, Jorgerden; Haverkort, 2008), os modelos estocásticos (Rao, 2003), os modelos analíticos (Zart, 2017), os modelos via teoria de identificação de



sistemas, (Machado, 2014, Romio, 2013) e os modelos híbridos (Gomes, 2017, Kim; Qiao, 2011, Zhang; Sharif; Alahmad, 2010).

Nesse contexto, o objeto de estudo desta pesquisa são os modelos híbridos, constituídos a partir da união de um modelo elétrico com um modelo analítico (Kusiak, 2016). Deste modo, os modelos híbridos conseguem agregar simultaneamente as vantagens dos modelos utilizados na sua constituição e por possibilitarem simulações acuradas, fornecendo uma quantidade maior de informações do processo de descarga (Kim; Qiao, 2011).

## **METODOLOGIA**

Para atingir o objetivo deste trabalho a seguinte metodologia foi seguida. Inicialmente, é apresentado um estudo teórico sobre descarga de baterias e sobre o modelo híbrido Kim, a partir de uma revisão bibliográfica da literatura técnica. A seguir são apresentados, de forma gráfica, os dados experimentais da descarga de oito baterias de Li-Po do modelo PL 383562 – 2C com capacidade de nominal de 800 mAh e tensão nominal de 4,2 V. Utilizando uma plataforma de testes, as baterias foram carregadas até atingirem 4,2 V, e descarregadas com uma corrente constante de 400 mA. Durante as descargas a tensão foi registrada por um sistema de aquisição de dados. Esses dados foram confrontados com a curva de descarga gerada pela simulação do modelo híbrido de Kim, implementado por meio da ferramenta Simulink/Matlab. Para a simulação do modelo foram considerados os parâmetros de Gomes (2017).

## **MODELAGEM MATEMÁTICA**

Nesta seção é realizada a fundamentação teórica que tem por objetivo embasar este artigo, abordando os conceitos básicos considerados pertinentes para o entendimento do tema, bem como os modelos matemáticos utilizados para a modelagem do tempo de vida de baterias.

### **Baterias**

As baterias são fontes de energia que permitem mobilidade aos dispositivos móveis sem que seja necessária à sua ligação a uma fonte fixa de energia, mesmo que seja por um limite finito de tempo. Elas são constituídas de uma ou mais células que por meio de reações eletroquímicas transformam energia química armazenada em energia elétrica. Tais células podem estar interligadas em série, paralelo ou por uma combinação de ambas (Jorgerden;

Haverkort, 2008, Silva; Sausen, 2014). As baterias também podem ser classificadas como células primárias ou secundárias, as células primárias não são recarregáveis, já as células secundárias sim. Portanto, compreende-se que a reação química que acontece dentro de uma célula secundária é reversível, pois é possível realizar a recarga da bateria (BOYLESTAD, 2004).

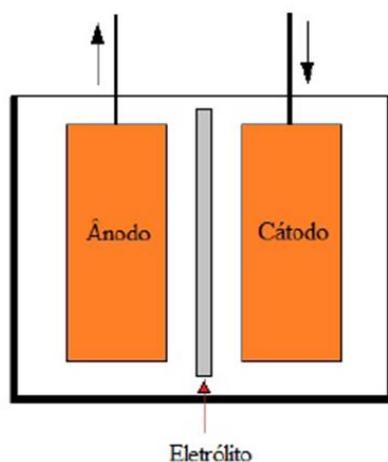


Figura 1: Esquema de uma célula eletroquímica (JORGERDEN; HAVERKORT, 2008).

De modo geral, uma célula eletroquímica é formada por dois eletrodos, um ânodo (polaridade negativa) e um cátodo (polaridade positiva), que são separados por um eletrólito. A corrente elétrica entra e sai da bateria por meio dos condutores metálicos, que são os eletrodos. O eletrólito pode ser sólido ou líquido e é um condutor de eletricidade que separa os eletrodos. No momento em que a bateria está fornecendo energia a um circuito externo, a corrente elétrica originada pelas reações químicas que ocorrem no interior das células, faz com que os elétrons, na forma de íons, se movam do ânodo para o cátodo através do eletrólito (SILVA; SAUSEN, 2014).

### Modelos Híbridos

Os modelos híbridos são uma categoria mais recente de modelos matemáticos utilizados para a predição do tempo de vida das baterias, reúnem as vantagens de duas categorias de modelos, e geralmente são formados pela união de modelos elétricos com analíticos.

Dentre os modelos híbridos da literatura destacam-se: os modelos de Kim (2011), Zhang (2010) e Gomes (2017), todos compostos pela união do modelo elétrico Chen e Rincón-



Mora com os modelos analíticos KiBaM, RV e Lei de Peukert Estendida, respectivamente. Os modelos híbridos agregam simultaneamente as vantagens dos modelos utilizados na sua constituição, e assim, possibilitam simulações acuradas que fornecem informações do processo de descarga. Assim, é possível obter modelos matemáticos que consideram em sua modelagem os principais efeitos não lineares presentes em um processo de descarga real, como também capturam as características elétricas do sistema, tais como, tensão e corrente. (GOMES, 2017)

### Modelo Híbrido de Kim

O modelo híbrido de Kim (2011), utilizado para prever o tempo de vida de baterias, caracteriza-se por uma união entre o modelo elétrico Chen e Rincón-Mora com o modelo analítico KiBaM. Para compor este modelo híbrido, o modelo elétrico foi escolhido por conseguir capturar todas as características dinâmicas do circuito da bateria, como a tensão de circuito aberto, a tensão terminal e a resposta transiente; já o modelo analítico, foi optado por conseguir capturar os efeitos não lineares do processo de descarga, (i.e. efeito de recuperação e efeito taxa de capacidade) que não são capturados pelo modelo elétrico (DUARTE, 2014).

O desenvolvimento do modelo híbrido acontece por meio da substituição dos componentes responsáveis pelo estado de carga e o tempo de vida da bateria, no modelo elétrico e pelas equações que constituem o modelo analítico KiBaM. Na Figura 2 mostra-se uma representação esquemática do modelo híbrido proposto por Kim.

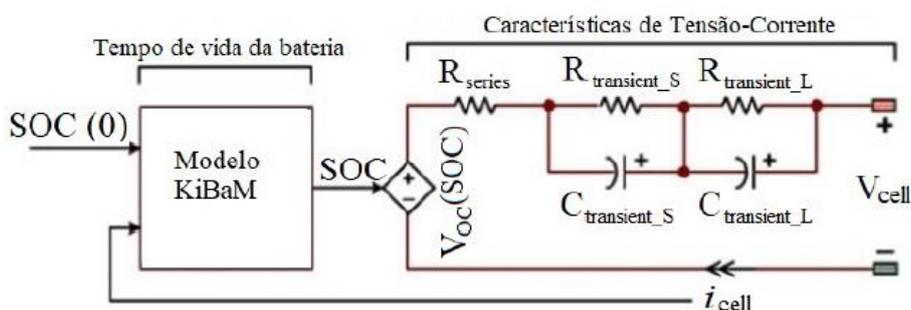


Figura 2: Esquema do Modelo Híbrido de Kim (Kim e Qiao, 2011).

Para a realização da modelagem do processo de descarga, entende-se como um período de tempo em que  $t_0 < t < t_r$ , no período de  $t_0 < t < t_d$  (com  $t_d < t_r$ ) a bateria é descarregada num primeiro momento por uma corrente constante (i.e.  $i_{cell} = I > 0$ ), passando



por um momento de relaxação no período restante ( $t_d < t < t_r$ ) com  $i_{cell} = 0$ . Desta forma, o estado de carga ( $SOC$ ) pode ser descrito pela seguinte equação:

$$SOC(t) = \frac{C_{available}(t)}{C_{max}}, \quad (1)$$

onde:  $C_{available}(t)$  e  $C_{max}$  são a capacidade disponível e a capacidade nominal da bateria, respectivamente. A capacidade disponível da bateria,  $C_{available}(t)$ , é determinada por:

$$C_{available}(t) = C_{initial} - l(t) - C_{unavailable}(t), \quad (2)$$

onde:  $C_{initial}$  é a capacidade inicial da bateria e  $l(t)$  é a carga total consumida pelo sistema, dada por:

$$l(t) = \int i_{cell}(t) dt, \quad (3)$$

A capacidade indisponível no tempo  $t$  é representada por  $C_{unavailable}(t)$  e pode ser descrita pela carga indisponível  $u(t)$ , oriunda do modelo KiBaM. A expressão  $u(t)$  é obtida a partir da substituição das equações (1) e (2) em (3) obtendo-se  $(t)$ , que é então substituído em (4), resultando em:

$$u(t) = \begin{cases} (1 - c) \left[ \delta(t_0) e^{-k'(t-t_0)} + \frac{I}{c} \cdot \frac{1 - e^{-k'(t-t_0)}}{k'} \right], & t_0 < t < t_d \\ (1 - c) \delta(t_d) e^{-k'(t-t_d)}, & t_d < t < t_r \end{cases}, \quad (4)$$

onde:  $c$  é a fração da capacidade total da bateria  $C$ ,  $\delta t_0$  é a diferença entre as alturas das fontes do modelo KiBaM no início da descarga,  $k'$  é a constante que representa a taxa de difusão de energia entre as fontes de cargas,  $(t_d)$  é a diferença entre as alturas das fontes do modelo KiBaM no tempo final de descarga,  $I$  é a corrente de descarga,  $t_0$  é o tempo inicial,  $t_d$  é o tempo final de descarga, e  $t_r$  é o tempo que resta para terminar o período.

Durante o processo de descarga, ou seja, no intervalo  $t_0 < t < t_d$ , a carga indisponível  $u(t)$  aumenta, o que representa o efeito taxa de capacidade. No intervalo  $t_d < t < t_r$ , a carga indisponível  $u(t)$  diminui, porque a carga da fonte limitada flui para a fonte de carga disponível



representando assim o efeito de recuperação. Com isso,  $C_{unavailable}(t)$  também pode ser representado por:

$$C_{unavailable}(t) = \begin{cases} C_{unavailable}(t_0)e^{-k'(t-t_0)} + (1-c)\frac{I}{c}\frac{1-e^{-t-t_0}}{k'}, & t_0 < t < t_d \\ C_{unavailable}(t_d)e^{-k'(t-t_d)}, & t_d < t < t_r \end{cases}, \quad (5)$$

onde:  $C_{unavailable}(t_0)$  é a capacidade indisponível da bateria no início da descarga, e  $C_{unavailable}(t_d)$  é a capacidade indisponível da bateria no final do tempo de descarga.

Portanto, o estado de carga ( $SOC$ ) é dado por:

$$SOC(t) = SOC_{initial} - \frac{1}{C_{max}} [\int i_{cell}(t)dt + C_{unavailable}(t)], \quad (6)$$

onde:  $SOC_{initial}$  é o  $SOC$  estimado antes de  $t_0$ ,  $i_{cell}(t)$  é a corrente de descarga, e  $C_{unavailable}(t)$  é a capacidade indisponível da bateria que é oriunda do modelo KiBaM. A tensão desse modelo pode ser expressa por:

$$V_{cell}(t) = V_{OC}[SOC(t)] - i_{cell}(t) \cdot R_{series} - V_{transient}(t), \quad (6)$$

onde:  $V_{cell}(t)$  é a tensão,  $V_{OC}[SOC(t)]$  é a tensão de circuito aberto,  $R_{series}[SOC(t)]$  é a resistência em série, e  $V_{transient}(t)$  é a tensão transiente e são obtidos através das seguintes equações:

$$V_{OC}[SOC(t)] = a_0 e^{-a_1[SOC(t)]} + a_2 + a_3[SOC(t)] - a_4[SOC(t)]^2 + a_5[SOC(t)]^3, \quad (7)$$

$$R_{series}[SOC(t)] = b_0 e^{-b_1[SOC(t)]} + b_2 + b_3[SOC(t)] - b_4[SOC(t)]^2 + b_5[SOC(t)]^3, \quad (8)$$

$$V_{transient}(t) = V_{transient_s}(t) + V_{transient_L}(t), \quad (9)$$

onde:  $V_{transient_s}(t)$  é a tensão transiente de curta duração, e  $V_{transient_L}(t)$  é a tensão de longa duração, dadas pelas seguintes equações respectivamente:



$$V_{transient_S}(t) = \begin{cases} R_{transient_S} \cdot i_{cell}(t) \left[ 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau S}} \right], t_0 < t < t_d \\ V_{transient_S}(t_d) e^{-\frac{(t-t_d)}{\tau S}}, t_d < t < t_r \end{cases}, \quad (10)$$

onde:  $R_{transient_S}$  é a resistência transiente de curta duração,  $V_{transient_S}(t_d)$  é a tensão transiente de curta duração no final da descarga, e  $S$  é o produto entre  $R_{transient_S}$  e  $C_{transient_S}$ , que representa a capacitância transiente de curta duração.

$$V_{transient_L}(t) = \begin{cases} R_{transient_L} \cdot i_{cell}(t) \left[ 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau L}} \right], t_0 < t < t_d \\ V_{transient_L}(t_d) e^{-\frac{(t-t_d)}{\tau L}}, t_d < t < t_r \end{cases}, \quad (11)$$

onde:  $R_{transient_L}$  é a resistência transiente de longa duração,  $V_{transient_L}(t_d)$  é a tensão transiente de longa duração no tempo final da descarga e  $L$  o produto entre  $R_{transient_L}$  e  $C_{transient_L}$ , que é a capacitância transiente de longa duração. Os parâmetros que modelam a tensão transiente são funções do  $SOC$  e dadas pelas quatro equações abaixo:

$$R_{transient_S}[SOC(t)] = c_0 e^{-c_1[SOC(t)]} + c_2, \quad (12)$$

$$C_{transient_S}[SOC(t)] = d_0 e^{-d_1[SOC(t)]} + d_2, \quad (13)$$

$$R_{transient_L}[SOC(t)] = e_0 e^{-e_1[SOC(t)]} + e_2, \quad (14)$$

$$C_{transient_L}[SOC(t)] = f_0 e^{-f_1[SOC(t)]} + f_2. \quad (15)$$

## RESULTADOS

Para os resultados apresentados nesta seção foram considerados oito experimentos de descarga de bateria de Li-Po, com a aplicação de uma corrente de 400 mA. Também foi realizada a simulação da descarga pelo modelo híbrido de Kim. Na Figura 3 são mostrados o resultado da simulação e os dados experimentais. Como é possível notar, o tempo de vida simulado pelo modelo aproxima-se do tempo de vida experimental médio. Também é destacada a curva experimental que mais se aproxima do tempo de vida experimental médio.

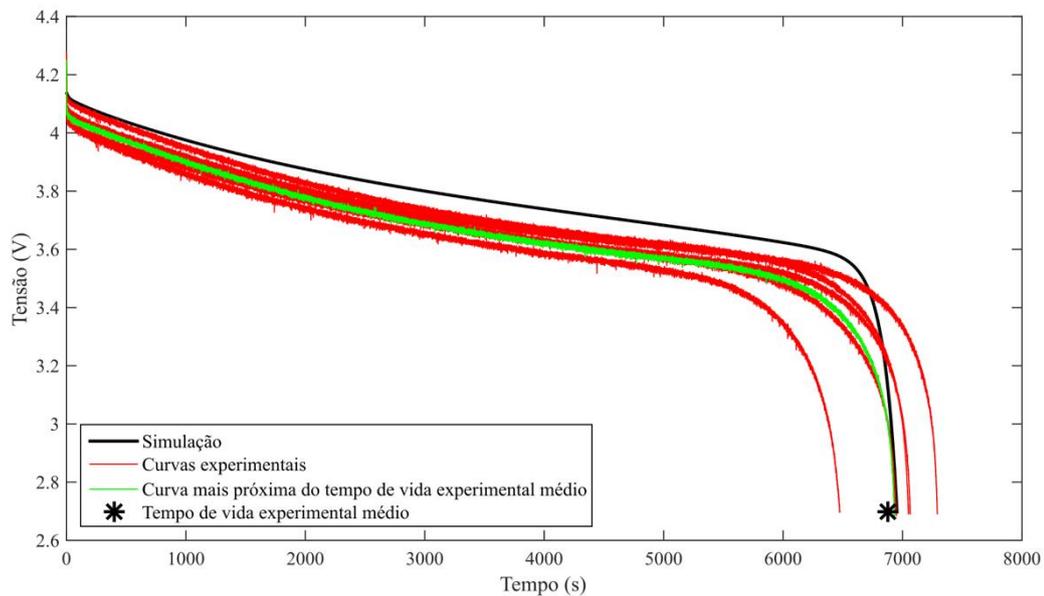


Figura 3: Comparação entre dados experimentais e a simulação do modelo.

Comparando a simulação com as curvas experimentais é possível perceber que existe uma diferença maior de tensão nas etapas iniciais de descarga, mas ao final, a simulação aproxima-se dos dados experimentais. O tempo de vida simulado foi de 6954 s, e o tempo de vida experimental médio foi de 6875 s, resultado em um erro relativo percentual de 1,15%.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A necessidade de produção de baterias recarregáveis projetadas para apresentarem maior tempo de vida vem sendo uma exigência dos usuários de dispositivos móveis. Tão logo, crescem as pesquisas que visam explorar tecnologias para atender essa demanda. Por conta disso, buscou-se investigar o tempo de vida das baterias por meio de modelos híbridos, neste caso, o modelo de Kim, que representa a união do modelo analítico de KibaM e o modelo elétrico Chen e Rincón-Mora. Os resultados obtidos mostram que o modelo híbrido de Kim se aproxima dos dados experimentais, apresentando um erro relativo de 1,15% para o caso de descarga constante de 400 mA. Mais estudos podem ser realizados a fim de considerar outros efeitos importantes, como a diminuição da capacidade da bateria devido ao número de ciclos de carga e descarga.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASHWIN, T. R.; CHUNG, Y. M.; WANG, J. Capacity fade modelling of lithium-ion battery under cyclic loading conditions. **Journal of Power Sources**, vol. 328, pp. 586-598, 2016, cited By :29. [Online]. Available: [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
- BINELO, M. d. F. B.; SAUSEN, A. T. Z.; SAUSEN, P. S. Método multi-fase de estimação e adaptação de parâmetros de modelos elétricos para a predição do tempo de vida de baterias. **Tese de Doutorado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, 2019.
- BOHACEK, J.; RAUDENSKY, M.; KARIMI-SIBAKI, E. Polymeric hollow fibers: Uniform temperature of li-ion cells in battery modules. **Applied Thermal Engineering**, vol. 159, 2019. [Online]. Available: [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
- BOYLESTAD, R. L., **Introdução à Análise de Circuitos**, 10th ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.
- BROUSSELY, M.; HERREYRE, S.; BIENSAN, P.; KASZTEJNA, P.; NECHEV, K.; STANIEWICZ, R. Aging mechanism in li ion cells and calendar life predictions. **Journal of Power Sources**, vol. 97, pp. 13-21, 2001.
- CHEN, M; RINCÓN-MORA, G. Accurate electrical battery model capable of predicting runtime and i-v performance. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, vol. 21, no. 2, pp. 504–511, jun. 2006.
- CLEMM, C.; SINAI, C.; FERKINGHOFF, C.; DETHLEFS, N.; NISSEN, N. F.; LANG, K. Durability and cycle frequency of smartphone and tablet lithium-ion batteries in the field. In **2016 Electronics Goes Green**, 2017. URL [www.scopus.com](http://www.scopus.com).
- DOYLE, M.; FULLER, T.; NEWMANN, J. Modeling of galvanostatic charge and discharge of the lithium polymer insertion cell. **Journal of Electrochemical Society**, vol. 140, pp. 1526–1533, jan. 1993.
- DUARTE, K. P. Aplicação de um modelo híbrido para predição do tempo de vida de baterias utilizadas em dispositivos móveis. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, abr. 2014.
- FREITAS, D. J. B. Estudo e aplicação de modelos analíticos na predição do tempo de vida de baterias utilizadas em dispositivos móveis: Proposição de extensões aos modelos tradicionais. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, set. 2015.



GOMES, L. B. Proposição de um modelo híbrido considerando a lei de peukert estendida para a predição do tempo de vida de baterias. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, mar. 2017.

JAFARI, M.; KHAN, K.; GAUCHIA, L. Deterministic models of li-ion battery aging: It is a matter of scale. **Journal of Energy Storage**, 20:67-77, 2018. URL [www.scopus.com](http://www.scopus.com).  
JORGEDEN, M. R.; HAVERKORT, B. **Which battery model to use?**. Imperial College London, Tech. Rep., 2008.

JZART, J. G. Análise comparativa de modelos analíticos sob o mesmo cenário de simulação para perfis de descargas variáveis considerando funções desempenhadas por um smartphone. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, mar. 2017.

KIM, T.; QIAO, W. A hybrid battery model capable of capturing dynamic circuit characteristics an nonlinear capacity effects. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, vol. 26, no. 4, December 2011.

KUSIAK, R. S. Modelagem matemática do tempo de vida de baterias de lítio íon polímero a partir de modelos híbridos considerando correntes de descarga variáveis. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, fev. 2016.

MACHADO, M. V. Modelagem matemática do tempo de vida de baterias utilizando modelos autorregressivos. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, abr. 2014.

MANWELL, J. G.; MCGOWAN, J. F. Lead acid battery storage model for hybrid energy systems. **Solar Energy**, vol. 50, no. 5, pp. 399–405, 1993.

MGEBBIE, M. A.; VALTINER, M.; BANQUY, X.; FOX, E. T.; HENDERSON, W. A.; ISRAELACHVILI, J. N. Ionic liquids behave as dilute electrolyte solutions. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, vol. 110, no. 24, pp. 9674-9679, 2013.

RAKHMATOV, D.; VRUDHULA, S. An analytical high-level battery model for use in energy management of portable electronic systems. in **Proceedings of the International Conference on Computer Aided Design (ICCAD '01)**. Piscataway: IEEE Press, 2001, pp. 488–493.

RAO, S.; VRUDHULA, R.; RAKHMATOV, D. N. Battery modeling for energy-aware system design. **IEEE Computer Society**, pp. 77–87, dec. 2003.

ROMIO, L. C. Modelagem matemática do tempo de vida de baterias utilizando a teoria de Identificação de Sistemas. **Dissertação de Mestrado**, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS, mar. 2013.

SILVA, P. S.; SAUSEN, B. F. Parameters estimation of the rakhmatov and vrudhula model from the optimization method search in improved network. **ISRN Applied Mathematics**, mar. 2014.

ZHANG, J.; CI, S.; SHARIF, M.; ALAHMAD, M. An enhanced circuit-based model for single-cell battery. in **2010 Twenty-Fifth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)**. IEEE, 2010, pp. 672-675.