



MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO APLICADA A POUPANÇA

MATHEMATICAL MODELING AS A TEACHING METHODOLOGY APPLIED TO SAVINGS

**Eduardo de Paula Alencar², Emilia Damásia de Sousa Xavier³, Leonardo Minelli⁴,
Airam Sausen⁵, Paulo Sérgio Sausen⁶, Maurício de Campos⁷**

¹ Trabalho da disciplina de Modelagem Matemática.

² Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional. Bolsista Unijuí 50%.

³ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

⁴ Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

⁵ Professora do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional

⁶ Professor orientador

⁷ Professor da disciplina de Modelagem Matemática

RESUMO

Trabalhar com educação financeira no ensino hoje em dia reflete diretamente na capacidade do aluno lidar com o dinheiro em um eventual investimento, para isso a modelagem matemática entra como uma metodologia para facilitar a transformação de um problema econômico do cotidiano em um modelo matemático. Neste trabalho utilizou-se conceitos matemáticos de taxas variáveis como ferramenta de estudo, modelando aplicações na poupança no ano de 2021 e mostrando o efeito dos juros compostos em cada mês.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Sistema financeiro. Poupança.

ABSTRACT

Working with financial education in education today directly reflects on the student's ability to deal with money in an eventual investment, for this mathematical modeling comes in as a methodology to facilitate the transformation of an everyday economic problem into a mathematical model. In this work, mathematical concepts of variable rates were used as a study tool, modeling savings investments in the year 2021 and showing the effect of compound interest in each month.

Keywords: Mathematical modeling. Financial system. Savings

INTRODUÇÃO

Em uma sociedade como a do Brasil em que os indivíduos possuem uma variedade de opções de produtos financeiros ligados ao dinheiro e que com o passar dos anos impacta diretamente em seus ganhos, caso venha obter algum produto, viabilizar um preparo para compreender o estudo na área econômica, ligada a matemática financeira, passa a ter uma



significativa importância, uma vez que a obtenção de tais produtos requer uma gama de conhecimentos seja ligados a aplicações, dívidas ou empréstimos.

Neste sentido, trabalhar com o tema matemático financeiro é por fim uma conquista que pode ser levada aos alunos no decorrer de suas formações escolares, isto é, mostrar a maneira mais adequada de lidar com o problema do dinheiro e suas aplicações. Para Bigode (2013) o estudo da matemática financeira é uma importante área para o conhecimento do aluno frente a sua atuação no mercado de trabalho, principalmente quando o quesito de aprendizagem seja o desenvolvimento de decisões econômicas, endividamentos, investimentos ou aplicações em renda fixa como a poupança.

O dinheiro é um bem que sempre é sinônimo de estudo e desenvolvimento em relação ao tempo e este, se não efetuado de maneira correta, corre o risco de se desvalorizar fazendo com que o seu detentor tenha seu poder de compra reduzido. Uma das formas que diversos governos instituíram em seus países foram os sistemas de capitalização atrelados ao tempo, calculados mensalmente, como uma forma de retribuir o empréstimo que o cidadão faz ao colocar dinheiro em uma instituição financeira (CADERNO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA, 2013).

Neste trabalho, foram desenvolvidos cálculos referentes a renda fixa da poupança, desenvolvendo uma modelagem matemática exponencial atrelado aos juros compostos explorando uma eventual aplicação futura, para isso foi desenvolvido com um estudo de caso a partir de dois problemas denominados de problema 1 e problema 2, com o objetivo de usar a modelagem matemática como uma metodologia de ensino na educação financeira.

METODOLOGIA

O estudo abordado visa mostrar a modelagem matemática realizada na parte financeira sobre aplicações em renda fixa no caso específico da poupança, vale ressaltar que os conceitos estabelecidos no texto são apoiados por estudos de Bassanezi (2002) e Burak (2016).

Nas seções seguintes são explicados os principais conceitos de uma aplicação financeira de poupança estabelecendo parâmetros nacionais de estudo, fornecidos por entidades bancárias como tabelas de impostos e amortização. No estudo foram levados em consideração todos os dados referentes aos doze meses do ano de 2021.



MODELAGEM MATEMÁTICA COMO MODELO DE ENSINO

Um dos precursores da modelagem matemática Bassanezi (2002), descreve a aplicação matemática da modelagem como um método científico de pesquisa e também uma forma de estratégia de conduzir o aluno a transformar um problema em um conceito matemático interpretando e envolvendo soluções para aperfeiçoar.

O nosso problema de modelagem destaca os estudos metodológicos de Burak (2016) em que se estabelece etapas no desenvolvimento da modelagem matemática destacando, em primeiro momento, a escolha do tema, a pesquisa referencial, o levantamento dos dados e por fim a resolução do problema com uma reflexão crítica do modelo.

TAXAS VARIÁVEIS EM JUROS

A taxa variável, como o próprio nome afirma varia com o tempo e é aplicada em capitalizações que utilizam juros compostos, conforme Sobrinho (2013) dado um capital inicial C_0 aplicados a n taxas distintas efetivas $i_1, i_2, i_3, i_4 \dots i_n$ por um período n e utilizando a capitalização composta obtemos a seguinte equação :

$$M_0 = C_0$$

$$M_1 = C_0 + C_0 \cdot i_1 = C_0(1 + i_1)$$

$$M_2 = C_0(1 + i_1) + C_0(1 + i_1) \cdot i_2 = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)$$

$$M_3 = C_0(1 + i_1)(1 + i_2) + C_0(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot i_3 = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$$

...

$$M_n = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n) \quad (1)$$

TAXA SELIC

Um dos estudos para se aplicar um rendimento na poupança chama-se taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) que é uma taxa básica de juros usada, no Brasil, para referenciar políticas monetárias do Banco Central (NETO, 2012). Ela tem como parâmetros os títulos públicos e seus financiamentos, registrada no sistema especial de liquidação e custódia SELIC, onde a variação ocorre periodicamente atualizada pelo COPOM



(Comitê de Políticas Monetária). A taxa SELIC está diretamente ligada a caderneta de poupança e serve para orientar sua política de remuneração.

CADERNETA DE POUPANÇA

A caderneta de poupança é um dos investimentos mais utilizados pelos brasileiros atualmente, visto que possui baixo risco e também é isenta de imposto de renda nos seus ganhos, por outro lado, seus lucros são reduzidos quando comparados a outros investimentos (CADERNO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA, 2013).

De acordo com o (BANCO CENTRAL) o retorno do investimento em poupança é estabelecido pelo art. 12 da Lei nº 8.177, de 1º de março de 1991, com a redação dada pela Medida Provisória nº 567, de 3 de maio de 2012, e art. 7º da Lei nº 8.660, de 28 de maio de 1993, ficando estabelecidos as seguintes parcelas:

- A remuneração básica, dada pela Taxa Referencial - TR, e
- a remuneração adicional, correspondente a: 0,5% ao mês, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for superior a 8,5%; ou 70% da meta da taxa Selic ao ano, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa Selic ao ano for igual ou inferior a 8,5%. Também fica estabelecido a creditação na data aniversário da conta e o rendimento mensal estabelecidos em 30 dias.

ETAPAS DA REALIZAÇÃO DA MODELAGEM

Para realização da modelagem foram considerados os valores disponibilizados pelo site Debit (2021), conforme apresentado na Tabela 1. Vale salientar que a TR (Taxa Referencial) e a taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) já estão inseridas nos dados e a variação anual foi descrita até o mês de dezembro de 2021. No primeiro dia útil de janeiro de 2022 acontece o resgate do dinheiro demonstrado no Problema 1, como a poupança possui uma incidência mensal de juros utilizou-se a taxa variável para efetuar os cálculos.

Já no Problema 2 acontece um aporte no mês de março, influenciando no cálculo da capitalização da equação (1), os resultados de ambos em questão foram mostrados graficamente pelas Figuras 1 e 2.



Tabela 1 – Taxas da poupança 2021

Tempo	Taxa (%)
jan/21	0,1159
fev/21	0,1159
mar/21	0,1159
abr/21	0,159
mai/21	0,159
jun/21	0,2019
jul/21	0,2446
ago/21	0,2446
set/21	0,3012
out/21	0,3575
nov/21	0,4412
dez/21	0,4902

Fonte: DEBIT 2021

PROBLEMA 1

Considerando que uma pessoa física investiu na poupança, com data de aniversário em 01/01/2021, uma quantia de R\$ 10.535,00 reais e resgatou o saldo no dia 01/01/2022. Determine o valor que essa pessoa receberá em 01/01/2022.

Utilizando a equação (1) e sabendo que a caderneta de poupança trabalha com taxas variáveis temos:

$$C_0 = 10.535,00$$

$$n = 12 \text{ meses}$$

$$i_1 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_2 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_3 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_4 = 0,159 \% \text{ a.m}$$

$$i_5 = 0,159 \% \text{ a.m}$$

$$i_6 = 0,2019 \% \text{ a.m}$$



$$i_7 = 0,2446\% \text{ a.m}$$

$$i_8 = 0,2446\% \text{ a.m}$$

$$i_9 = 0,3012\% \text{ a.m}$$

$$i_{10} = 0,3572\% \text{ a.m}$$

$$i_{11} = 0,4412\% \text{ a.m}$$

$$i_{12} = 0,4902\% \text{ a.m}$$

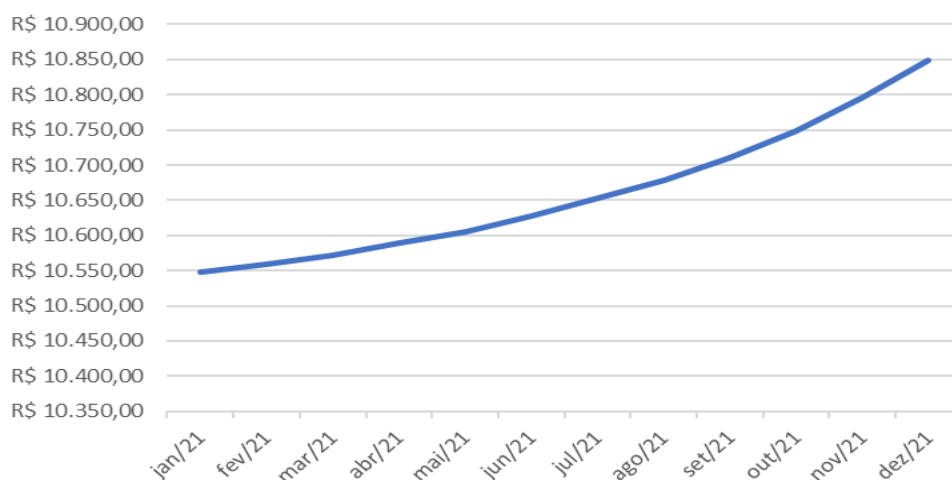
$$M_n = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n)$$

$$M_{12} = 10.535,00 (1 + 0,001159).(1 + 0,001159).(1 + 0,001159).(1 + 0,00159). \\ (1 + 0,00159).(1 + 0,002019).(1 + 0,002446).(1 + 0,002446).(1 + 0,003012). \\ (1 + 0,003572).(1 + 0,004412).(1 + 0,004902)$$

$$M_{12} = 10.849,55$$

Pode-se observar que a taxa da poupança variou com o tempo e a aplicação do problema 1 acompanhou o formato exponencial, obviamente pelo fato de ter uma capitalização mensal como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Evolução do valor investido



Fonte próprio autor



PROBLEMA 2

Considerando que uma pessoa investiu na poupança em 01/01/2021 uma quantia de R\$ 1.200.000,00 realizando um segundo aporte de R\$ 300.000,00 no dia 15/03/2021. Considerando ainda, que o resgate será realizado no dia 01/01/2022, determine o valor que essa pessoa receberá em 01/01/2022

Aplicando a equação (1) deve-se observar os juros do mês de março e incrementar aos R\$ 300.000,00 reais lembrando que os juros dos R\$ 300.000,00 entraram na data de aniversário do aporte da poupança que é dia 01 no problema:

$$C_0 = 1.200.000,00$$

$$n = 12 \text{ meses}$$

$$i_1 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_2 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_3 = 0,1159 \% \text{ a.m}$$

$$i_4 = 0,159 \% \text{ a.m}$$

$$i_5 = 0,159 \% \text{ a.m}$$

$$i_6 = 0,2019 \% \text{ a.m}$$

$$i_7 = 0,2446 \% \text{ a.m}$$

$$i_8 = 0,2446 \% \text{ a.m}$$

$$i_9 = 0,3012 \% \text{ a.m}$$

$$i_{10} = 0,3572 \% \text{ a.m}$$

$$i_{11} = 0,4412 \% \text{ a.m}$$

$$i_{12} = 0,4902 \% \text{ a.m}$$

$$M_n = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_n)$$

$$M_3 = 1.200.000,00.(1 + 0,001159).(1 + 0,001159).(1 + 0,001159)$$

$$M_3 = 1.204.177,23$$

$$M_3 + 300.000,00$$

total de R\$ 1.504.177,23, com esse novo capital deve-se aplicar, novamente, a equação (1) agora com as taxas do mês de abril até dezembro:



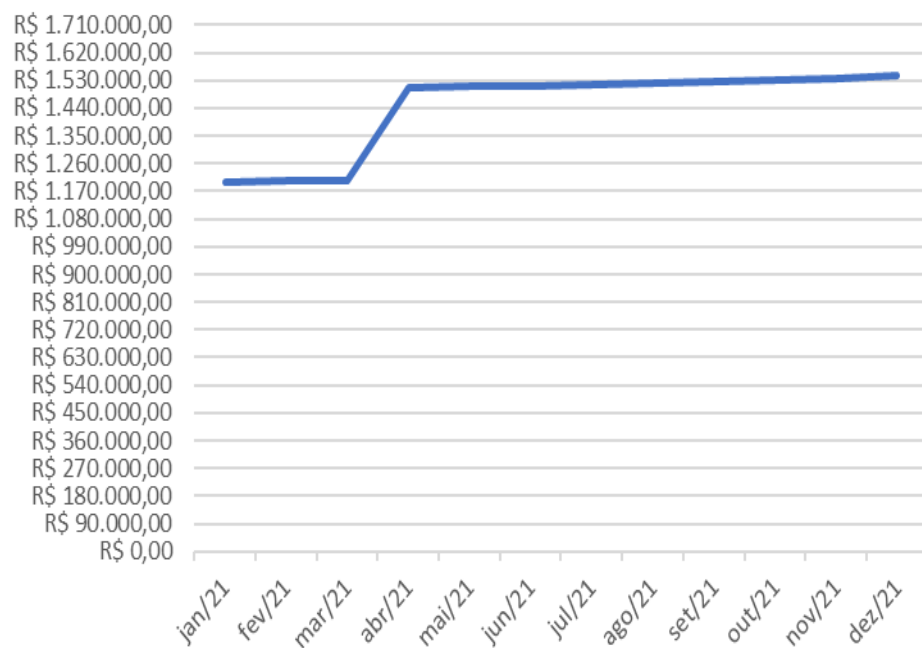
$$M_{12} = 1.504.177,23.(1 + 0,00159).(1 + 0,00159).(1 + 0,002019).(1 + 0,002446).$$

$$(1 + 0,002446).(1 + 0,003012).(1 + 0,003572).(1 + 0,004412).(1 + 0,004902)$$

$$M_{12} = 1.543.715,15$$

A ocorrência de aportes depende da taxa da poupança do respectivo mês, visto que na Tabela 1 a taxa variou para todos os meses do ano de 2021, o ideal é estar sempre atualizado com os depósitos do mês. Na figura 2 é apresentado o efeito de aportes na tendência exponencial.

Figura 2 – Evolução da Poupança com aporte



Fonte: Próprio autor

Podemos observar que durante o ano de 2021, as taxas de referência da poupança, sofreram variações no decorrer dos meses afetando diretamente a equação (1), a diferença entre o montante inicial e o valor do resgate varia com aportes por parte do investidor, não é aconselhado retirar o dinheiro dos juros ganhos no mês anterior, pois como mencionado anteriormente a influência da equação (1) depende da posição anterior já capitalizada. Ao adicionar um novo capital a curva gerada por esse aporte gera um salto no mês de abril, conforme pode ser observado na Figura (2).



CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cenário das aplicações em poupança depende muito das taxas mensais repassadas pelos bancos aos cidadãos, existem outras formas de renda fixas mais atraentes em relação a poupança, contudo, cada uma tem suas particularidades como por exemplo incidência de impostos, taxas de administração, inflação, entre outras.

Neste estudo foram detalhados os investimentos iniciais na poupança, trabalhando com taxas variáveis como capitalização composta em cada mês, visto que, cada aplicação depende da retirada ou de aportes mensais. Pode-se concluir que aportes mensais ajudam na curva exponencial do investimento multiplicando o rendimento.

Ao apresentar esses modelos aos alunos, como ferramenta de ensino, pode-se trabalhar com taxas de poupança de anos anteriores e também ver o resultado em calculadoras específicas para poupança observando o valor final investido ao final de cada período. É importante apresentar, de forma gráfica, o efeito de cada investimento e aporte representa no valor final para facilitar a compreensão do aluno.

Em trabalhos futuros espera-se também utilizar as ferramentas deste trabalho adicionando aplicações em renda fixa como CDB (Certificado de depósito bancário), LCI (Letras de Crédito Imobiliário), LCA (Letras de Crédito do Agronegócio) e tesouro direto. Lembrando que cada conceito tem suas regras específicas mas que podem ser adaptadas ao modelo de ensino aqui apresentado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Caderno de Educação Financeira** – Gestão de Finanças Pessoais: BCB, 2013. 72p.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br>> Acesso em: 15 jul. 2022.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Remuneração da poupança**. Disponível em: <<https://www.bcb.gov.br/estatisticas/remuneradepositospoupanca>> Acesso em: 15 jul. 2022.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto, 2002.

BIGODE, Antônio José Lopes, **Matemática**, São Paulo, Editora Scipione, 1ª edição, 2013



BURAK, Dionísio; BRANDT, Celia Finck (Ed.). **Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações**. Editora da Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2016.

DEBIT. **Poupança**. Disponível em: <<https://www.debit.com.br/tabelas/tabela-completa.php?indice=poupanca>> Acesso em: 11 jul. 2022.

NETO, A.A. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12. Ed. São Paulo: Atlas 2012

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. v 1. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

SOBRINHO, J. D. V. **Matemática financeira**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1994