



26/09/2025

Unijuí Campus Santa Rosa



CÁLCULO DE ÁREAS REAIS COM GEOGEBRA: APLICAÇÃO DE INTEGRAIS DEFINIDAS E POLINÔMIOS INTERPOLADORES

Categoria: Ensino Superior

Modalidade: Matemática Aplicada e/ou Inter-relação com outras disciplinas

DA SILVA, Julio de Moraes; DA ROCHA, Samuel Bueno; PIVA, Cláudia.

Instituição participante: UNIJUÍ - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Ijuí/RS.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido na disciplina de Matemática da Variação, no curso de Licenciatura em Matemática da UNIJUÍ, no segundo semestre de 2024, por um grupo de alunos, sob a orientação da professora Claudia Piva. A proposta surgiu a partir de uma atividade avaliativa e da curiosidade em compreender como as integrais definidas podem ser aplicadas a problemas reais. O local escolhido foi o Lago da Pedreira, em Ijuí/RS, por permitir o uso de imagens de satélite no cálculo da área de uma superfície de contorno irregular.

A realização do estudo se justifica pela importância de aproximar a teoria matemática de situações concretas, integrando o uso da modelagem polinomial, do cálculo integral e de softwares como GeoGebra e Excel. Nossa hipótese inicial era de que, por meio da interpolação polinomial e do cálculo de integrais, seria possível estimar a área do lago com elevada precisão em relação ao valor fornecido pelo Google Earth.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar o processo de cálculo da área do Lago da Pedreira a partir de imagens de satélite, utilizando o GeoGebra, destacando as etapas realizadas, as dificuldades enfrentadas e os resultados obtidos

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na realização do projeto, foram utilizados os softwares Google Earth, Microsoft Excel e GeoGebra, que possibilitaram desde a coleta inicial de dados até a modelagem matemática e a validação dos resultados obtidos.

O problema central deste estudo consistiu em determinar a área da superfície do Lago da Pedreira, localizado no município de Ijuí/RS, a partir de imagens de satélite obtidas no Google Earth (Figura 1). O desafio estava no fato de o lago possuir um contorno irregular, o que inviabiliza a aplicação de fórmulas geométricas tradicionais para o cálculo de áreas.

Inicialmente, planejamos utilizar o software GeoGebra apenas para a marcação dos pontos no plano cartesiano, transferindo-os posteriormente para o Microsoft Excel, onde seriam gerados gráficos de dispersão e suas respectivas funções polinomiais por meio das linhas de tendência do próprio programa. Essa primeira estratégia visava obter aproximações funcionais que permitissem calcular a porção de cada área por meio de integrais definidas.

No entanto, a irregularidade do contorno mostrou-se um desafio ainda maior, conduzindo à adoção de uma nova metodologia, com o GeoGebra como ferramenta central.

Figura 1- Imagem obtida no Google Earth do lago com delimitação da superfície.



Fonte: Os Autores (2024)

Inicialmente, buscamos definir duas funções matemáticas — uma para a parte superior e outra para a parte inferior do eixo das abscissas (x) — que nos permitissem calcular as integrais de forma direta. No entanto, devido à irregularidade do contorno do lago, encontrar funções que representassem com precisão essas curvas mostrou-se inviável.

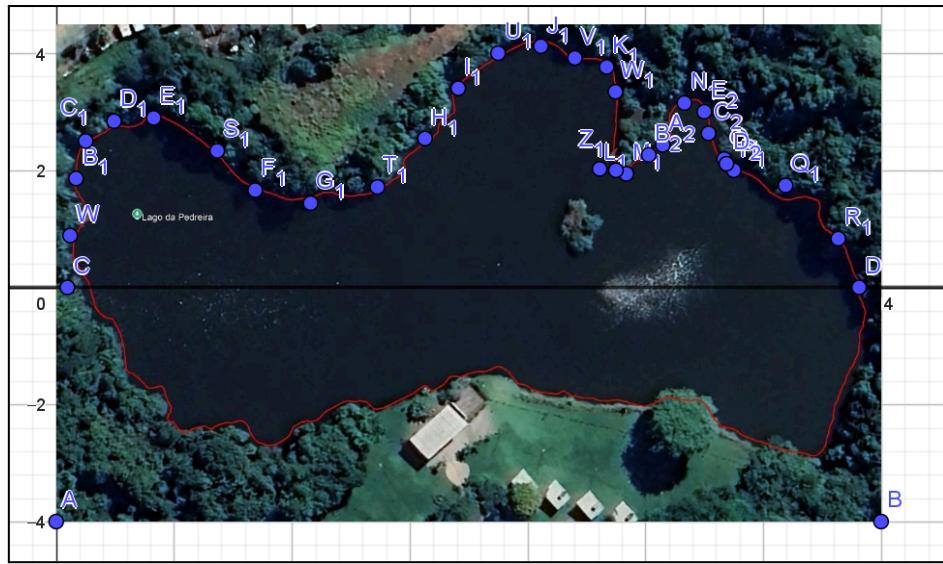


Como alternativa, dividimos a figura, alinhando-a ao eixo das abscissas por meio de uma demarcação horizontal. Em seguida, identificamos dois pontos no plano cartesiano, denominados pontos “C” e “D”, que foram utilizados como limites inicial e final das funções a serem trabalhadas.

Com a imagem centralizada no GeoGebra e os pontos inicial e final devidamente definidos, iniciamos a marcação de outros pontos ao longo de toda a linha vermelha traçada na imagem. Esses pontos serviram como referência para encontrar funções que representassem com boa precisão as curvas desse traçado.

Para simplificar e organizar o processo, dividimos os pontos em dois conjuntos: os localizados acima do eixo das abscissas e os que estavam abaixo dele. Assim, trabalhamos inicialmente com uma das curvas e, em seguida, com a outra, conforme ilustrado nas Figuras 2 e 3.

Figura 2- Pontos marcados acima do eixo das abscissas.

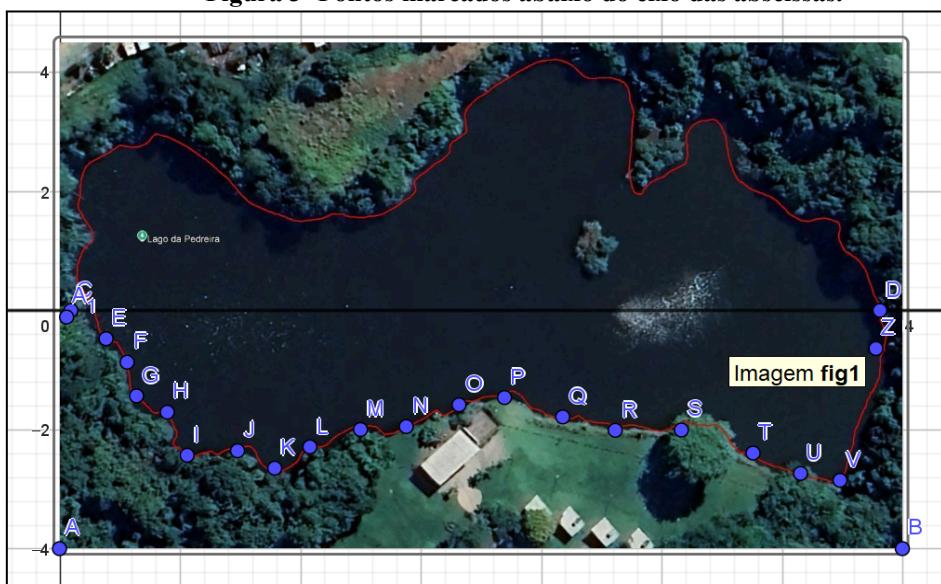


Fonte: Os Autores (2024)

Após a importação da imagem para o GeoGebra e a marcação dos pontos que representavam o contorno do lago, cada um deles foi registrado em forma de pares ordenados (x, y). Para organizar os dados e facilitar o tratamento numérico, todas as coordenadas foram transcritas para uma planilha no Microsoft Excel, compondo uma tabela estruturada. A partir dessa tabela, geramos gráficos de dispersão e utilizamos o recurso de linhas de tendência do próprio Excel para tentar modelar matematicamente o contorno do lago. A ideia inicial era que essas funções aproximadas servissem como base para o cálculo das integrais.



Figura 3- Pontos marcados abaixo do eixo das abscissas.



Fonte: Os Autores (2024)

Entretanto, como o Excel permite ajuste apenas até polinômios de grau 6, as curvas geradas apresentaram fortes distorções, principalmente nos pontos extremos. Mesmo ao segmentar o gráfico em partes menores e ajustar diferentes funções para depois somar as áreas correspondentes, o resultado permaneceu insatisfatório e incoerente com o contorno real do lago. Essa limitação evidenciou que o método adotado não era adequado, pois o desenho formado pelas curvas de tendência não correspondia ao formato do lago, tornando necessária a busca por uma nova estratégia de modelagem.

Diante dessas limitações, adotamos uma nova abordagem, utilizando o GeoGebra como ferramenta principal e explorando o recurso de polinômios interpoladores. Diferentemente do Excel, que restringe o grau dos polinômios, o GeoGebra permite gerar funções de grau superior, ajustadas conforme a quantidade de pontos selecionados. Assim, foi possível representar o contorno do lago com maior fidelidade, já que o polinômio interpolador é construído de modo a passar exatamente por todos os pontos escolhidos.

Contudo, observou-se que nos pontos extremos — o primeiro e o último — o polinômio tende a oscilar fortemente, às vezes divergindo para valores muito altos, próximos ao infinito, o que compromete a precisão da curva. Para contornar esse problema, ao realizar a integração de cada segmento optamos por definir novos limites nas extremidades, garantindo que o traçado considerado fosse estável e coerente com a borda real do lago. Além disso, em

alguns casos foram inseridos pontos adicionais fora da área delimitada, apenas para suavizar o comportamento da curva.

Esse procedimento possibilitou a obtenção de funções muito mais precisas, que serviram de base para o cálculo das áreas por meio do comando Integral(<Função>, <Valor de x inicial>, <Valor de x final>) do GeoGebra, conforme ilustrado na Figura 4.

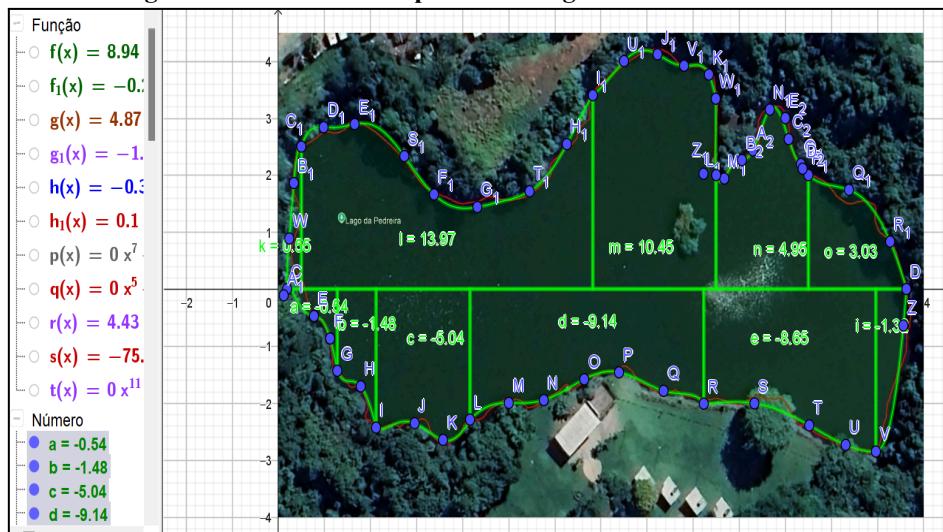
Figura 4- Polinômio de um segmento utilizado no trabalho.



Fonte: Os Autores (2024)

A partir das funções geradas, seguindo a estratégia de segmentação e utilizando os pontos extremos como referência para ajustar o polinômio (movendo-os ou criando novos), foi possível calcular a área total da superfície do lago em unidades arbitrárias, conforme mostrado na Figura 5.

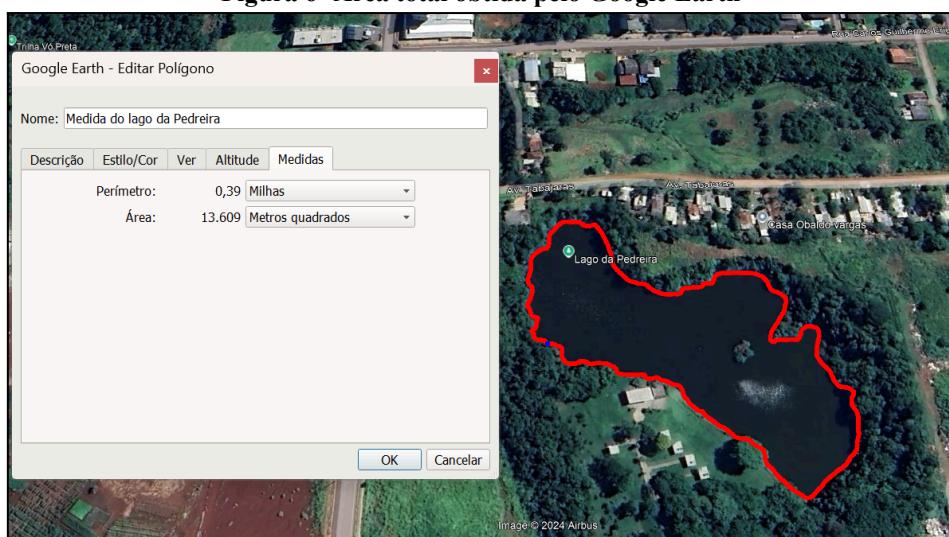
Figura 5- Área total da superfície do lago obtida no GeoGebra.



Fonte: Os Autores (2024)

Para converter a área obtida no GeoGebra, expressa em unidades arbitrárias, para medida real, definimos uma escala linear a partir da razão entre uma distância medida no GeoGebra (1,2 u.m.) e no Google Earth (18,2 m). Como se trata de área, utilizamos a razão ao quadrado (S^2) na conversão. Aplicando essa escala à área total calculada (59,12 u.a.), encontramos 13.599 m², valor que difere em apenas 10 m² do resultado fornecido pelo Google Earth (13.609 m²), conforme mostrado na Figura 6, confirmando a precisão do método.

Figura 6- Área total obtida pelo Google Earth



Fonte: Os Autores (2024)



26/09/2025

Unijui Campus Santa Rosa



CONCLUSÃO

O trabalho possibilitou a aplicação prática de conceitos de integrais definidas e de interpolação polinomial no cálculo da área de uma superfície irregular. Apesar das dificuldades iniciais com o Excel, o uso do GeoGebra mostrou-se uma alternativa eficiente, permitindo representar com maior precisão o contorno do lago e realizar o cálculo integral de forma confiável. A etapa final, com a utilização do método da escala, confirmou a eficácia do processo ao apresentar um resultado (13.599 m^2) muito próximo ao valor fornecido pelo Google Earth (13.609 m^2), alcançando uma precisão de aproximadamente 99%. Dessa forma, a experiência evidenciou o potencial do GeoGebra como ferramenta didática e investigativa, reforçando a importância de conectar a matemática teórica a problemas reais.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. v.1.. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

GEOGEBRA TEAM. **GeoGebra 5**. Versão 5.0. Linz: GeoGebra Institute, 2014. Software.

GOOGLE LLC. **Google Earth**. Versão 7.3. Mountain View: Google LLC, 2024. Software.

MICROSOFT CORPORATION. **Microsoft Excel 2021**. Versão 14.0. Redmond: Microsoft Corporation, 2018. Software.