RESFRIAMENTO DO LEITE NA INDÚSTRIA ALIMENTÍCIA: UMA APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Categoria: Ensino Superior

Modalidade: Matemática Aplicada e/ou Inter-relação com outras disciplinas

NOVISKI, Tiago A. M.; BAIRROS, Stephani da Silva; SPILIMBERGO, A. Patricia

Instituição participante: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) – Ijuí/RS

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) constituem uma importante ferramenta matemática para modelar fenômenos que envolvem variações contínuas ao longo do tempo. Sua aplicabilidade abrange diversas áreas do conhecimento, como física, biologia, economia, engenharia e ciências sociais.

O presente trabalho foi elaborado com finalidade avaliativa no componente curricular de Matemática Aplicada, do terceiro módulo do Curso de Matemática, da UNIJUÍ, elaborado no primeiro semestre de 2025. Propomos a aplicação de EDOs na resolução de problemas reais ilustrando sua utilidade. A aplicação está situada no contexto industrial, considerando o resfriamento do leite à granel na propriedade e seu posterior resfriamento para a industrialização, utilizando a Lei do Resfriamento de Newton.

A Lei do Resfriamento de Newton descreve uma situação de equilíbrio térmico entre um corpo e o ambiente em que ele se encontra. De acordo com Bassanezi e Ferreira Junior (1988), a taxa de variação da temperatura de um corpo (sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente, ou seja, a velocidade com que a temperatura de um corpo muda, resfriando ou aquecendo, depende diretamente do quão diferente está sua temperatura em relação ao ambiente. Exemplificando, se um corpo estiver muito mais quente que o ambiente, ele resfriará rapidamente, em contrapartida, se estiver só um pouco mais quente, ele esfriará devagar, e quando a temperatura do corpo se iguala à do ambiente, ela para de sofrer alterações.

A situação foi escolhida por representar um contexto real e próximo do cotidiano, sendo relacionada à segurança alimentar. A situação é resolvida por meio de modelagem matemática com EDOs, utilizando dados reais ou verossímeis, com análise dos resultados. Assim, o objetivo deste trabalho é compreender e aplicar EDOs na modelagem de fenômenos concretos, destacando sua relevância tanto na vida prática quanto na formação matemática.

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

A produção leiteira teve crescentes e grandes transformações a partir da década de 90, no Brasil. Tal crescimento trouxe impactos sobre a estrutura produtiva, mais especificamente tratando da Qualidade do Leite, assunto estimulado pelas indústrias captadoras de leite. Na indústria, o controle de temperatura do leite é um fator crítico para garantir sua qualidade e segurança microbiológica. Após a ordenha, o leite deve ser resfriado até atingir uma temperatura igual ou inferior a 4ºC em um máximo de 2 horas, conforme a IN 76/2018. Essa redução de temperatura inibe o crescimento de microrganismos patogênicos e deteriorantes, preservando as características físico-químicas e sensoriais do produto. Durante o transporte e o armazenamento na indústria, essa temperatura deve ser rigorosamente mantida, normalmente em tanques isotérmicos ou câmaras frias, até que o leite passe pelas etapas de pasteurização ou processamento.

Para aplicar a situação matemática à essa realidade, consideramos dois momentos distintos: **1º Momento:** O leite (o corpo do problema) pós ordenha, à 35ºC (o leite recém ordenhado apresenta uma temperatura entre 35℃ e 37℃, referente a temperatura corporal do animal). Ao entrar no tanque resfriador, o mesmo precisa reduzir sua temperatura de 35℃ até 4℃ em até 2 horas (de acordo com a IN 76/2018) e aguardar o transporte. **2º Momento:** O leite ao sair do tanque resfriador da propriedade, mistura-se ao leite do tanque do caminhão, passa pelo processo de transporte e chega à indústria, passa pelo trocador de calor do entreposto (pré-fabrica ou fábrica) e sua temperatura, que deverá estar no máximo em 7℃, e ser aperfeiçoada aos 3℃ conforme a IN 77/2018. Esse momento é importante para adequar a temperatura por vezes não atingida na propriedade.

Levando em conta esses dois momentos, passamos a simular, através da lei de Newton em relação ao Resfriamento dos Corpos, a variação da temperatura do leite (com o passar do tempo), nesses dois momentos da cadeia produtiva.

A lei de Resfriamento dos Corpos, de Newton, afirma que *"a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente"*. Dessa forma, considerando: $T(t)$ a temperatura de um corpo no tempo t; $\frac{dT}{dt}$ a taxa de variação da temperatura no tempo t e Tm a temperatura do meio ambiente, a lei de Newton pode ser escrita como:

$$\frac{dT}{dt} \sim (T - Tm) \Rightarrow \frac{\frac{dT}{dt}}{T - Tm} = -k \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - Tm). \qquad (1)$$

onde k corresponde a constante de proporcionalidade, e torna-se necessário o sinal negativo, pois em um processo de resfriamento, com o passar do tempo a temperatura diminui. Pode-se dizer que essa constante k é a "ligação matemática" que transforma a proporcionalidade em uma equação diferencial. Assim, a Eq. (1) pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - Tm) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \qquad (2)$$

sendo T_0 o valor da temperatura no tempo inicial $t = 0$.

A solução geral da Eq. (2) pode ser determinada pelo método de separação de variáveis. Seja a Eq. (2), iniciamos o processo de separação de variáveis organizando a equação de modo que tenhamos em cada lado da igualdade as variáveis devidamente separadas, ou seja, a variável temperatura (T) de um lado da igualdade e a variável tempo (t) do outro, ou seja:

$$\frac{dT}{T - Tm} = -k\, dt.$$

Na sequência, com as variáveis separadas, integramos os dois lados da igualdade:

$$\int \frac{dT}{T - Tm} = \int -k\, dt \Rightarrow ln(T - Tm) = -kt + c.$$

Eliminamos o logaritmo, aplicando exponencial nos dois lados da igualdade:

$$(T - Tm) = e^{-kt+c} \Rightarrow T - Tm = e^{-kt}.e^{c}$$

indicando a constante e^c por L, obtemos:

$$T - Tm = L.e^{-kt} \Longrightarrow T = Tm + e^{-kt} \qquad (3)$$

essa expressão, Eq. (3), é a Solução Geral da respectiva equação diferencial.

Para a determinação da constante L, utilizamos a condição inicial da temperatura no tempo $t = 0$, ou seja: $T(0) = T_0$, dado na Eq. (2), assim temos:

$$T(0) = Tm + Le^{-k.0} \Longrightarrow T_0 = Tm + L.e^0 \Longrightarrow T_0 = Tm + L \Longrightarrow L = T_0 - Tm.$$

Substituindo o valor encontrado para L na Eq. (3) obtemos:

$$T(t) = Tm + (T_0 - Tm).e^{-kt} \qquad (4)$$

essa expressão, Eq. (4), é a Solução Particular da respectiva equação diferencial, a Eq. (2).

Na sequência realizamos, através da solução encontrada, a simulação de como se dá o resfriamento do leite nos dois momentos indicados e que de fato ocorrem na cadeia do leite, ou seja, o processo de resfriamento do leite recém ordenhado, ainda na propriedade e o processo de resfriamento do leite ao ser recebido na indústria que realizará o seu beneficiamento. Para isso, consideramos: $T(t)$ a temperatura do leite no tempo t; T_0 a temperatura inicial do leite; Tm a temperatura do meio refrigerado; k a constante de resfriamento; e^{-kt} o termo que diminui com o tempo, fazendo com que a temperatura do leite se aproxime de Tm.

Para o 1º momento, referente ao resfriamento na propriedade, consideramos a temperatura inicial em 35°C, a temperatura do tanque resfriador em 4°C e ainda foi suposto que em 1 hora a temperatura do leite atingiria 10°C, ou seja:

- ✓ Temperatura inicial $\Longrightarrow$ $T_0 = 35°C$
- ✓ Temperatura do meio $\Longrightarrow Tm = 4°C$
- ✓ Temperatura em 60 $min \Longrightarrow T(60) = 10°C$

Levando em conta esses valores foi possível, através da Eq. (4) determinar o valor da constante de proporcionalidade k:

$$T(60) = 4 + (35 - 4).e^{-60k} \Longrightarrow 6 = 31.e^{-60k} \Longrightarrow e^{-60k} = \frac{6}{31} \Longrightarrow -60k = ln\left(\frac{6}{31}\right)$$

$$k = \frac{ln\left(\frac{6}{31}\right)}{-60} \Longrightarrow k = \frac{1{,}6425}{60} \Rightarrow k \approx 0{,}0274$$

Esse coeficiente k representa a taxa de resfriamento intrínseca do corpo, nesse caso o leite, indicando a rapidez com que sua temperatura varia em relação a diferença entre a sua temperatura e a temperatura do ambiente. Um maior valor de k indica que o corpo (leite) perde calor mais rapidamente , enquanto um menor valor significa um resfriamento mais lento. Vale ressaltar, que essa constante sofre influência em relação a diferentes características do meio circundante como a condutividade térmica e as propriedades de transferência de calor por convecção.

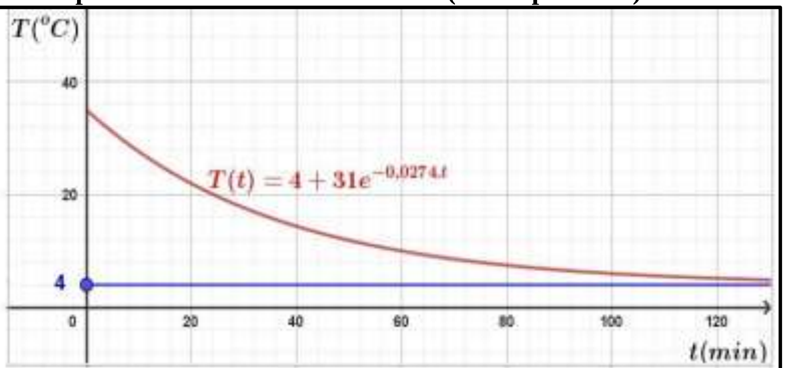
Conhecendo o coeficiente k, a equação da temperatura dada pela Eq. 4, pode ser escrita como:

$$T(t) = 4 + 31.e^{-0{,}0274.t} \tag{5}$$

e, a partir da Eq. (5) passamos a explorar a temperatura do leite em diferentes tempos. Optamos por simular o valor da temperatura para tempos de 30, 45 e 90 minutos, e os resultados obtidos encontram-se na Figura 1 a seguir.

Figura 1: Variação da Temperatura do Leite no Resfriador (na Propriedade).

Tempo (em min)	Temperatura (em °C)
0	35
30	17,61
45	13,02
60	10
90	6,64



Fonte: Autoria própria considerando valores obtidos na resolução dos cálculos (2025).

Para o 2º momento, referente ao resfriamento do leite na indústria, consideramos a temperatura do meio (água gelada no trocador de calor) em 1°C, e foi suposto que o leite ao chegar à indústria, após misturar-se ao que estava no tanque do caminhão que realiza o transporte da propriedade até a indústria, apresentava uma temperatura de 7°C e que para atingir a temperatura final desejada de 3°C, foram necessários 5 min, ou seja:

- ✓ Temperatura inicial $\Longrightarrow\ T_0 = 7°C$
- ✓ Temperatura do meio (água gelada no trocador de calor) $\Longrightarrow Tm = 1°C$
- ✓ Tempo no trocador de calor $\Longrightarrow t = 5\, min$
- ✓ Temperatura final desejada $\Longrightarrow T(5) = 3°C$

Levando em conta esses valores foi possível, através da Eq. (4) determinar a constante de proporcionalidade k para esse 2º momento:

$$T(5) = 1 + (7-1).e^{-k.5} \Rightarrow 3 = 1 - 6.e^{-5k} \Rightarrow e^{-5k} = \frac{1}{3} \Rightarrow -5k = ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$-5k = -\,ln\,ln\,(3) \;\Rightarrow 5k = ln(3) \Rightarrow k = \frac{ln\,ln\,(3)}{5} \Rightarrow k \approx 0{,}2197$$

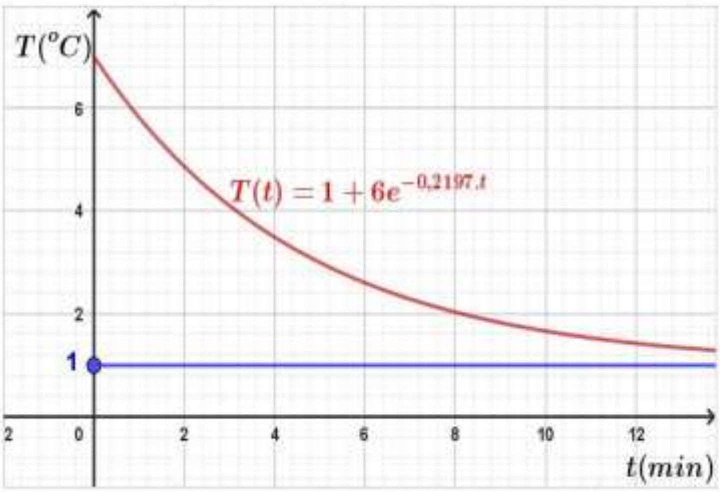
A partir da determinação do coeficiente k, a Eq. (4), pode ser escrita como:

$$T(t) = 1 + 6.e^{-0{,}2197.t} \tag{6}$$

e a partir dessa Eq. (6), passamos a explorar a temperatura do leite em diferentes tempos. Escolhemos simular o valor da temperatura para tempos de 1 a 5 minutos, e os resultados obtidos encontram-se na Figura 2 a seguir.

Figura 2: Variação da Temperatura do Leite na Indústria.

Tempo (em min)	Temperatura (em °C)
0	7
1	5,8
2	4,8
3	4,1
4	3,4
5	3



Fonte: Autoria própria considerando valores obtidos na resolução dos cálculos (2025).

Assim, com base na Lei de Resfriamento de Newton foi possível simular o resfriamento do leite nos dois momentos indicados, e que de fato ocorrem na cadeia do leite: o leite recém ordenhado, ainda na propriedade e o leite ao ser recebido na indústria que o beneficia. Conforme os resultados encontrados, tanto para o 1º como o 2º momento, mostrados nas Figuras 1 e 2, observamos que o leite esfria mais rapidamente no início do processo de resfriamento (no 1º momento em torno de 50% nos primeiros *30* □□□, conforme a IN 76/2018, e no 2º momento em torno de 83% no primeiro minuto) e depois, de forma mais lenta, se aproxima da temperatura do meio, *4℃* no 1º momento, e *3℃* no 2º momento, conforme a Lei de Resfriamento dos Corpos de Newton.

CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo aplicar conceitos de EDOs na resolução de uma situação-problema relacionada a um contexto real e cotidiano. Por meio da aplicação proposta: o resfriamento do leite tanto na propriedade como na indústria, foi possível observar a capacidade das EDOs de modelar e prever diferentes comportamentos com base em modelos matemáticos. A aplicação baseada na Lei de Newton do Resfriamento objetivou analisar o comportamento da temperatura do leite em duas situações realísticas na cadeia produtiva e nos permitiu analisar os dados obtidos e confirmar o que indica lei, ou seja, um corpo esfria mais rapidamente no início e depois de forma mais lenta, se aproxima da temperatura do meio.

O desenvolvimento deste trabalho proporcionou uma experiência prática significativa em sua aplicação. Entre as principais dificuldades enfrentadas, destacamos a modelagem correta do problema e a manipulação algébrica da solução. No entanto, esses desafios contribuíram para uma aprendizagem mais sólida e contextualizada, valorizando a Matemática como instrumento de compreensão e transformação da realidade. Atividades como esta proposta enriquecem nossos olhares perante a Matemática, entendendo, de fato, sua aplicabilidade no cotidiano e em situações reais.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR., W. C. **Modelagem Matemática: uma introdução à prática interdisciplinar**. São Paulo: Atual, 1988.

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Instrução Normativa nº 76, de 26 de novembro de 2018. Brasília: MAPA, 2018.

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Instrução Normativa nº 77, de 26 de novembro de 2018. Brasília: MAPA, 2018.

Trabalho desenvolvido na disciplina de Matemática Aplicada, do Curso de Matemática, da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul -UNIJUÍ, pelos alunos: Stephani da Silva Bairros; Tiago Antônio Martins Noviski.

Dados para contato:

Expositor: Tiago Antônio Martins Noviski; **e-mail:** tiago.noviski@sou.unijui.edu.br;

Expositor: Stephani da Silva Bairros; **e-mail:** stephani.bairros@sou.unijui.edu.br;

Professor Orientador: A. Patricia Spilimbergo; **e-mail:** patspi@unijui.edu.br.