DETERMINAÇÃO DO VOLUME DE UMA TAÇA POR INTEGRAIS DEFINIDAS USANDO O GEOGEBRA

Categoria: Ensino Superior

Modalidade: Matemática Aplicada e/ou Inter-relação com outras Ciências

PIETCZAK, Luiz Antonio Jensen; SIMA, Pamela Simony Schreiber; SPILIMBERGO, A. Patricia Grajales.

Instituição participante: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Ijuí RS

INTRODUÇÃO

A motivação inicial para a realização deste trabalho surgiu da curiosidade de relacionar a teoria do cálculo integral com possíveis aplicações desse. O cálculo de volumes de sólidos de revolução por meio de integrais constitui um tema pertinente, já que possibilita estabelecer conexões entre a teoria matemática e situações práticas, articulando conceitos abstratos com problemas concretos. Nesse sentido, foi escolhido como objeto de investigação o volume de uma taça de vidro, por ser essa taça, nitidamente, um sólido de revolução. Além disso, essa taça é um objeto acessível, em que conseguimos facilmente realizar as medições e utilizando recursos computacionais, como o software GeoGebra (2016), conseguimos determinar o seu volume. Como destaca Araújo (2023, p. 5), o uso do GeoGebra nas aulas de Matemática contribuiu com aspectos positivos no ensino de Geometria. Dessa forma, para a pesquisa, o software mostrou-se fundamental, pois possibilitou a construção da curva de contorno da taça, a visualização dinâmica do sólido de revolução e a aplicação do cálculo de integrais.

Este mesmo trabalho, foi desenvolvido na disciplina de Matemática da Variação no segundo módulo do Curso de Matemática, mas com uma carga de precisão inferior, desta vez, utilizamos um processo similar, aplicando os métodos com uma acuidade de maior grau. A problemática central consistiu em investigar: será que o cálculo integral, aplicado a partir de uma modelagem matemática, consegue fornecer um valor confiável para o volume de um objeto real? Partindo dessa questão, levantamos a hipótese de que a modelagem por funções polinomiais, associada ao método de determinação do volume de sólidos de revolução através de integrais, poderia aproximar o resultado teórico do valor real medido experimentalmente. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é determinar o volume aproximado de uma taça (nitidamente um sólido de revolução) a partir da aplicação da integral definida, utilizando ferramentas computacionais (como o software GeoGebra) e comparar o resultado obtido com a medição do volume da taça real, de modo a validar a aplicabilidade do cálculo integral em problemas reais.

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa utilizou análise quantitativa, uma vez que os dados foram coletados em forma numérica, tanto na medição prática da capacidade da taça (em mililitros), quanto nos resultados obtidos nas medições para a determinação do modelo matemático da curva a ser rotacionada, para obtenção do sólido de revolução e a determinação do volume desse sólido, através do cálculo de uma integral definida, utilizando o GeoGebra. O tratamento dos dados ocorreu por meio da comparação entre o valor experimental e o valor teórico para o volume, permitindo verificar a aproximação entre eles e calcular o erro relativo.

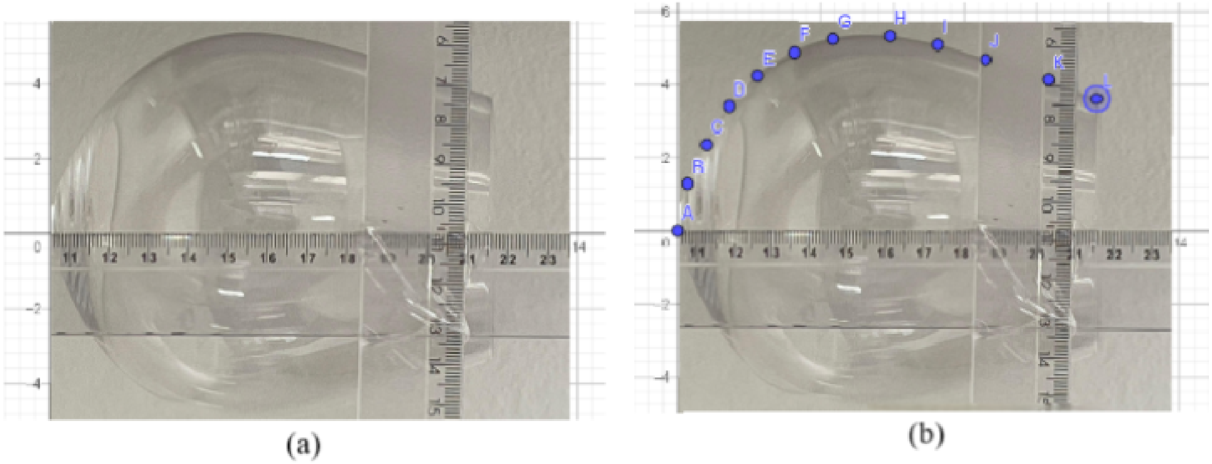
Além disso, foi realizada uma análise qualitativa ao interpretar os resultados obtidos, refletindo sobre a eficiência do processo de modelagem matemática e sobre as contribuições pedagógicas do uso do GeoGebra como ferramenta tecnológica para a compreensão de sólidos de revolução, visto que "o uso deste software e da modelagem como estratégia de ensino pode ajudar na compreensão dos conceitos e propriedades geométricas, na construção, na visualização geométrica de objetos, de lugares, de localização, entre outros" (ALVES, 2024).

O objeto escolhido para análise, como já mencionado, foi uma taça de vidro, cuja forma simétrica permitiu a aplicação do conceito matemático de sólido de revolução. Foi necessária a determinação da curva de contorno (função) que ao ser girada em torno do eixo das abscissas gera o sólido de revolução. A curva foi ajustada por meio de ferramentas do software GeoGebra, gerando um polinômio que representa matematicamente o perfil da taça. Para complementar este estudo utilizamos o Wolframalpha (2025), onde encontramos algumas similaridades, de simulações entre o referido e o software GeoGebra.

Para iniciar o processo, o recipiente foi preenchido com água colorida por corante amarelo, a fim de facilitar a visualização do nível do líquido, e em seguida foi realizada a medição de sua capacidade, que resultou em 72*ml*. Esse procedimento experimental serviu como base para comparar e validar o resultado obtido com a modelagem matemática.

Em seguida, colocamos a imagem, nas proporções corretas, no software Geogebra, ou seja, em escala. Alinhamos essa imagem corretamente nos eixos que o software apresenta, ou seja no plano cartesiano, conforme mostra a imagem na Figura 1.

Figura 1 - (a) Taça no GeoGebra alinhada aos eixos com as devidas proporções e (b) com os pontos demarcados em volta da taça.



Fonte: Os autores (2025).

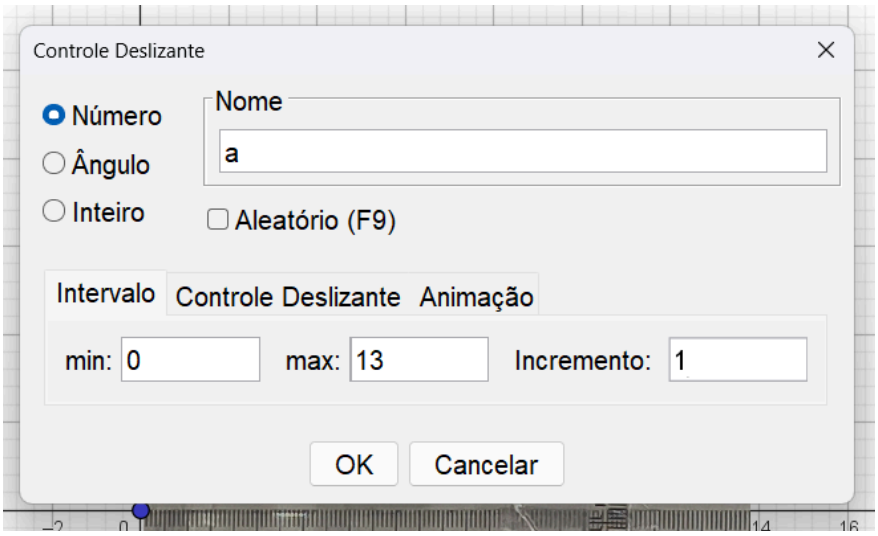
Posteriormente, utilizando a ferramenta “pontos”, foram sendo demarcados pontos em toda a volta do perfil da taça (pontos de A a L), sendo que estes pontos serviram de base para conseguirmos modelar nossa função polinomial, conforme mostra a imagem da Figura 1.

Em sequência criamos uma lista de pontos, digitando na “Janela de Entrada” de comandos do GeoGebra, o respectivo item: “ Lista = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L}”.

Logo a seguir criamos o controle deslizante para escolher o grau da função polinomial e definirmos assim, o grau da função que melhor representa o contorno da taça. Definimos então a nomenclatura do mesmo como sendo “a”, considerando o intervalo do controle deslizante de 0 a 13, e o incremento de grau em 1 unidade, conforme mostra a imagem na Figura 2.

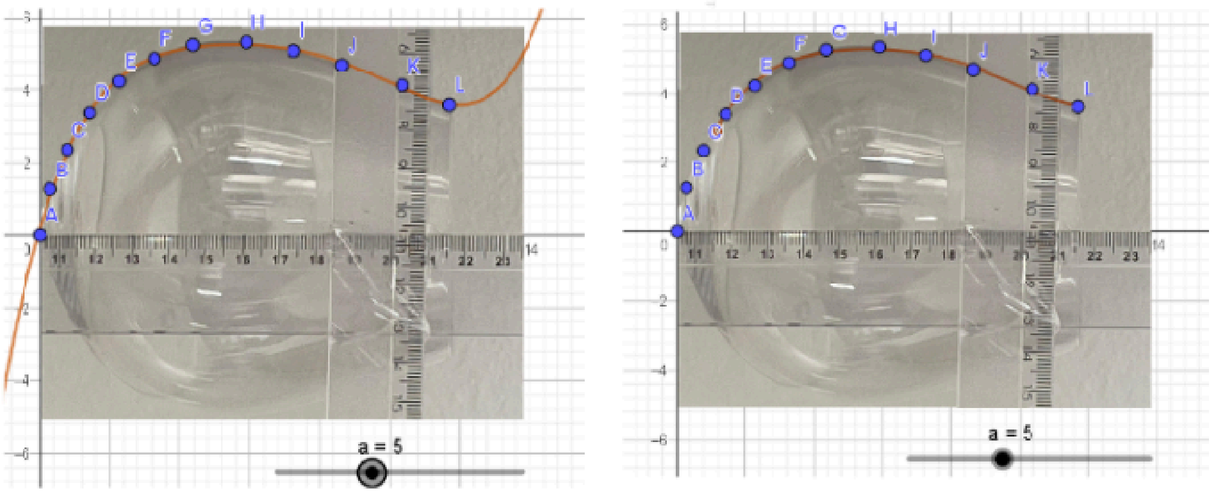
Após, através do comando de regressão polinomial, modelamos a função utilizando o comando: RegressãoPolinomial (<Lista de Pontos>, <Grau do Polinômio>), sendo a lista de pontos colocada no primeiro parâmetro e no segundo colocada a referência do controle deslizante. Neste momento chegamos a função: $f(x) = 0.00028x^5 - 0.00973x^4 + 0.13051x^3 - 0.9073x^2 + 3.32397x + 0.18819$. Utilizamos uma função polinomial de grau 5, por ser a que mais se aproximou dos pontos demarcados sobre a imagem da taça, no intervalo estabelecido, conforme pode ser observado na Figura 3.

Figura 2 - Controle deslizante referente ao número do grau da função polinomial no GeoGebra.



Fonte: Os autores (2025)

Figura 3 - (a) Taça no GeoGebra, com o polinômio que foi criado a partir dos pontos e (b) com a delimitação da função no intervalo estabelecido.



(a) (b)

Fonte: Os autores (2025)

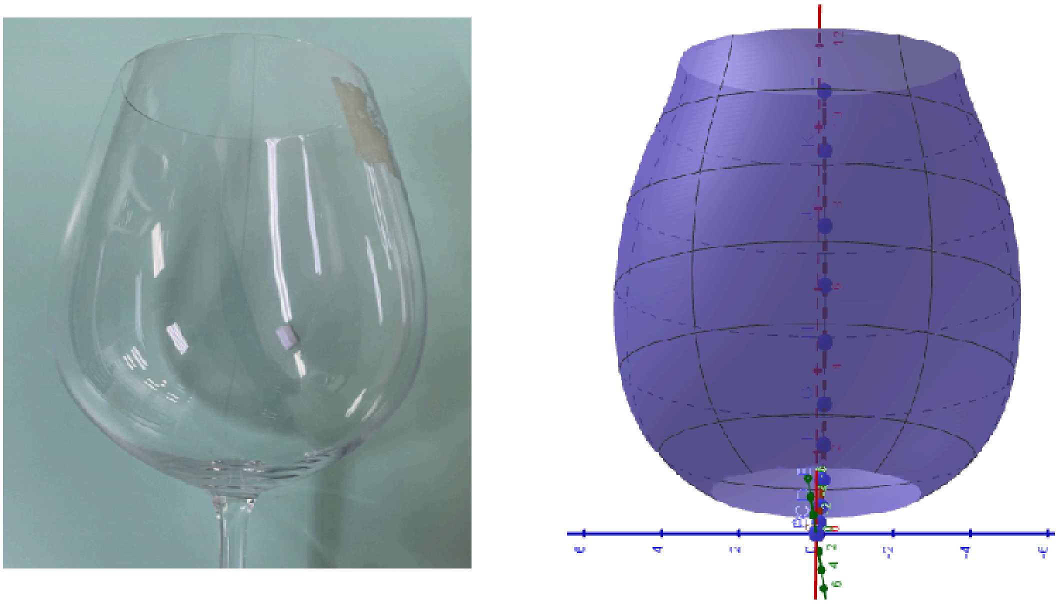
A seguir definimos uma outra função, g(x), onde delimitamos o intervalo para calcular o volume (Figura 3), ou seja, colocamos na Janela de Entrada do GeoGebra o comando: “Se (<Condição>, <Então>)”, que resultou essa nova função, apenas no intervalo estabelecido. O comando utilizado foi: “Se ($1 \leq x \leq 11.6$, f(x)), resultando assim na função

$$g(x) = 0.00028x^5 - 0.00973x^4 + 0.13051x^3 - 0.9073x^2 + 3.32397\,x + 0.18819,$$

definida no intervalo $1 \leq x \leq 11.6$.

Para criarmos o sólido de revolução, definimos o ângulo α, através de um controle deslizante (que ao ser alterado de 0º a 360º gera o sólido procurado) e utilizamos o comando “ Superfície(g, α, Eixo X)” , conforme mostrado na Figura 4 a seguir.

Figura 4 - (a) Taça real e o (b) sólido de revolução gerado a partir do comando “Superfície” do GeoGebra.



(a) (b)

Fonte: Os autores (2025)

Finalmente, para determinar o volume do sólido obtido utilizamos expressão $V = \int_a^b \pi \,.\, g(x)^2 dx$ (GUIDORIZZI, 2014), através do comando: Integral = (π*(g(x))², 1 , 11.8).

O valor encontrado para o volume foi 728.69543 cm^3, ou seja, aproximadamente 728 ml, valor muito próximo do encontrado experimentalmente, que foi 725ml. Logo a seguir, determinamos o erro cometido, que foi em torno de 3,6 ml, o que corresponde aproximadamente a uma margem de erro de 0,50% em relação ao volume da taça real.

CONCLUSÕES

A integral definida mostrou-se uma ferramenta extremamente eficiente na solução do problema proposto, pois permitiu calcular o volume de forma precisa, com base em uma função matemática que representa fielmente o formato da taça. A validação experimental do volume utilizando a medida real do recipiente confirmou a exatidão do método apresentando um erro mínimo, o que ressalta a aplicabilidade prática do cálculo integral em situações reais.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foram enfrentadas algumas dificuldades, especialmente na etapa de determinação da função que melhor representa a curva de contorno da taça, o que exigiu o uso de ferramentas como o GeoGebra para gerar uma função polinomial ajustada em relação aos pontos levantados. Além disso, a interpretação dos resultados e a comparação entre os resultados, teórico e experimental, demandaram atenção aos detalhes, especialmente na escala.A experiência de realizar este trabalho foi enriquecedora, pois proporcionou uma aplicação concreta de conceitos teóricos vistos em sala de aula. A conexão entre a matemática abstrata e sua utilização no mundo físico reforçou a importância da integral definida como uma ferramenta poderosa e versátil, capaz de resolver problemas complexos de forma eficiente. Este aprendizado não apenas consolidou o entendimento dos conceitos, mas também despertou o interesse em explorar novas aplicações práticas da matemática no cotidiano. Portanto, concluímos que o objetivo do trabalho foi plenamente alcançado, com resultados satisfatórios e um processo de aprendizado significativo.

REFERÊNCIAS

ALVES, Wecsley Fernando Marçal. **Modelagem Matemática e GeoGebra.** Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem, v. 9, p. 113–126, 2024. Disponível em: https://rebena.emnuvens.com.br/revista/article/view/231. Acesso em: 1 set. 2025.

ARAÚJO, Francisco Cleuton de. **Uso do GeoGebra no ensino de sólidos geométricos: um relato de experiência**. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – CONEDU, 9., 2023, Campina Grande. Anais... Campina Grande: Realize Editora, 2023. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/99543. Acesso em: 30 ago. 2025.

GEOGEBRA. **Calculadora gráfica GeoGebra**. Versão 06. [S.l. : s. n.], 2016. Disponível em: www.geogebra.org. Acesso em: 03 set. 2025.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo: volume 1.** 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

WOLFRAMALPHA. **From the makers of wolfram language and mathematica. Recursos e ferramentas**. [S. l.], 2025. Disponível em: https://www.wolframalpha.com/. Acesso em: 03 set. 2025.

Trabalho desenvolvido pelos estudantes do quarto módulo do curso de Matemática, da UNIJUÍ: Evandro Centenaro Martins; Luiz Antônio Jensen Pietczak; e Pamela Simony Schreiber Sima.

Dados para contato:

Expositor: Luiz Antônio Jensen Pietczak; **e-mail:** luiz.pietczak@sou.unijui.edu.br;

Expositor: Pamela Simony Schreiber Sima; **e-mail:** pamela.sima@sou.unijui.edu.br;

Professor Orientador: Ângela Patricia Grajales Spilimbergo; **e-mail:** patspi@unijui.edu.br.