APRENDENDO MATEMÁTICA A PARTIR DA GEOMETRIA FRACTAL

Categoria: Ensino Fundamental - Anos Finais

Modalidade: Matemática Pura

SANTOS, Anderson Gustavo Krawczuk dos; SILVA, Leonardo Marques da; MAROSKI, Marcelo Wachter

Instituição participante: Escola Municipal Fundamental João Goulart – Ijuí/RS

INTRODUÇÃO

Em linhas gerais, um fractal pode ser definido como “[...] um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se sua estrutura idêntica à original." (ASSIS *et al.*, 2008, p. 1). Essa definição reflete a propriedade da autossimilaridade, considerada a mais marcante e elementar de um fractal (CARVALHO, 2005), por meio da qual é possível reconhecer a figura inicial a cada ampliação feita na imagem (SOUZA; CLEMENTE, 2020).

Outra característica importante dos fractais é a complexidade infinita, que está relacionada ao processo de construção de tais objetos, o qual considera a repetição de uma série de procedimentos (ASSIS *et al.*, 2008), que, juntos, correspondem ao que se chama iteração. Desse modo, pode-se dizer que os fractais são construídos a partir de um processo iterativo, no qual uma ação ou princípio é repetido infinitamente (CARVALHO, 2005).

O estudo da geometria fractal considera tanto formas inerentes à natureza – como determinadas plantas ou o sistema arterial dos rins – quanto figuras abstratas (ASSIS *et al.*, 2008), muitas vezes obtidas a partir de formas geométricas bem conhecidas. Nesse último grupo, destacam-se o tapete e o triângulo de Sierpinski, ambas estudadas e amplamente divulgadas pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, que nasceu em Varsóvia, em 14 de março de 1882, na família de um renomado médico (ENGELKIN, 1998).

A partir do estudo desses dois fractais, é possível explorar uma série de objetos de conhecimento que fazem parte do currículo de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para a realização do trabalho apresentado neste relato de experiência, optou-se pela turma do 8º ano da Escola Municipal Fundamental João Goulart, envolvendo um total de 15 alunos. Em dois momentos distintos das aulas de Matemática, um deles no primeiro e o outro no segundo trimestre, os fractais de Sierpinski foram utilizados para introduzir o estudo de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ e do conceito de proporcionalidade, respectivamente.

Para a construção de ambos os fractais, decidiu-se fazer uso de um recurso tecnológico digital, o que permite maior praticidade, agilidade e precisão. Assim, optou-se pelo *software* GeoGebra, amplamente divulgado como uma forma de aprender Matemática de maneira dinâmica e gratuita, numa abordagem que contempla todos os níveis de ensino (LUCIANO, 2018). Portanto, o objetivo do presente trabalho é demonstrar que, aliada a recursos tecnológicos digitais, a geometria fractal, apesar de não constar nos currículos oficiais, pode ser ponto de partida para a exploração de diferentes objetos de conhecimento relativos ao 8° ano.

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

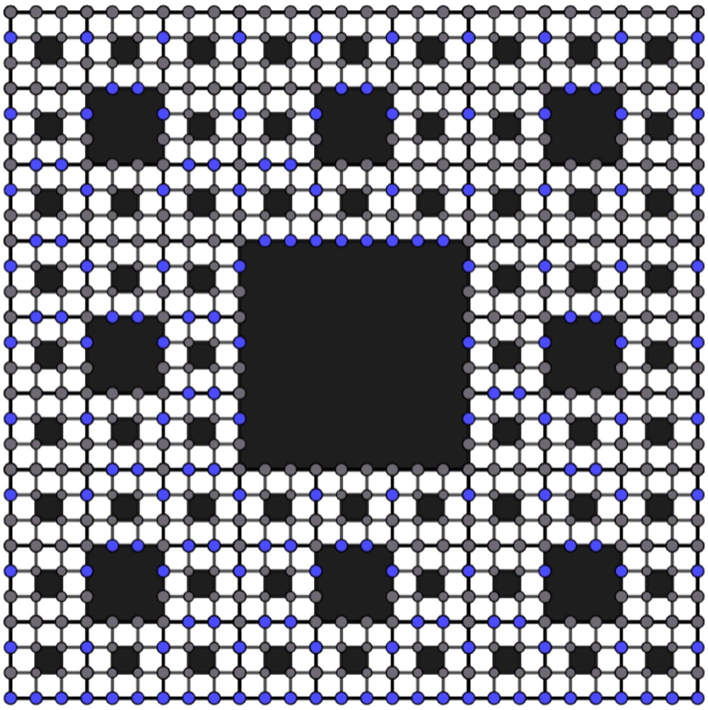
Inicialmente, realizou-se uma aula expositiva sobre geometria fractal, apresentando alguns fractais abstratos e outros presentes em formas da natureza. Também discutiu-se sobre as propriedades de autossimilaridade e complexidade infinita. Esse momento teve grande importância para o bom andamento do trabalho desenvolvido, visto que os alunos não tinham conhecimento a respeito da geometria fractal e, antes de mais nada, precisavam se apropriar de algumas ideias elementares sobre o assunto.

Após esse momento introdutório, deu-se início à construção do fractal conhecido como tapete de Sierpinski, cujo ponto de partida é um quadrado. Para realizar a primeira iteração desse fractal, deve-se marcar dois pontos em todos os lados do quadrado, de modo que cada lado fique dividido em três partes congruentes. Em seguida, unem-se os pontos opostos com segmentos de reta, resultando em nove quadrados menores, dos quais deve-se remover aquele que se encontra na posição central.

Caso o fractal seja construído com materiais manipuláveis, a remoção de tal quadrado consiste no ato de recortá-lo. Para um fractal construído em ambiente virtual, assim como na proposta do presente trabalho, concede-se ao quadrado central uma cor de destaque, restando oito quadrados não coloridos.

Para realizar a segunda iteração, deve-se repetir o procedimento descrito anteriormente para cada um dos oito quadrados remanescentes. Na Figura 1, apresenta-se o tapete de Sierpinski construído, até a terceira iteração, por um dos alunos do 8º ano.

Figura 1 - Terceira iteração do tapete de Sierpinski.



Fonte: Os autores (2025).

Na aula posterior à construção do fractal, o professor apresentou à turma o seguinte problema: “Um tapete de Sierpinski foi construído a partir de um quadrado com 81 cm² de área. Após a primeira iteração, qual será a medida do lado dos novos quadrados obtidos?”. A resolução de tal problema é bastante simples, especialmente após a experiência de construção do fractal. De fato, alguns alunos informaram a solução correta para o problema após um curto espaço de tempo, fazendo uso de raciocínios pessoais. O desafio, então, foi traduzir o enunciado do problema para a linguagem matemática e resolver a equação obtida por meio de manipulações algébricas.

Após a primeira iteração do tapete de Sierpinski são obtidos nove quadrados idênticos, dos quais deseja-se descobrir a medida do lado, que pode ser indicada por x. Elevando-se a incógnita ao quadrado, obtém-se uma representação para a área de cada um desses quadrados. Multiplicando-se a área por 9, o resultado deve ser igual à área do quadrado original, que é 81 cm². Assim, obtém-se a seguinte equação do 2º grau:

$$9x^2 = 81.$$

Diante disso, a solução do problema proposto passa a depender da resolução de um tipo de equação com a qual os alunos ainda não haviam trabalhado. Nesse momento, o professor aproveitou a oportunidade para discutir a ideia de que a potenciação de expoente 2 e a radiciação de índice 2 são operações inversas e construiu, junto aos alunos, um caminho para resolver equações do tipo $ax^2 = b$.

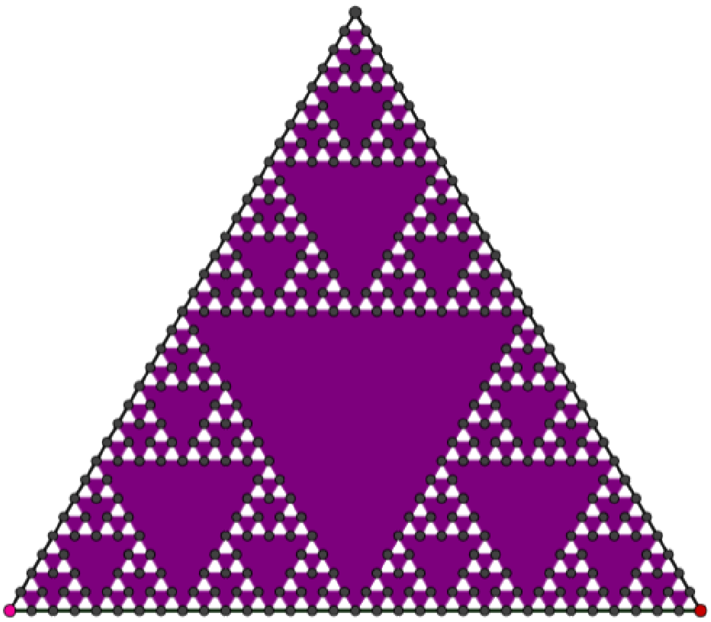
No segundo trimestre letivo, a geometria fractal voltou a ser utilizada nas aulas de Matemática do 8º ano, dessa vez para introduzir a ideia de proporção a partir do triângulo de Sierpinski. Visto que os alunos já haviam trabalhado com fractais em outro momento, essa segunda atividade ocorreu de forma mais tranquila que a primeira.

A figura inicial deste segundo fractal de Sierpinski é um triângulo equilátero, em cujos lados deve ser marcado o ponto médio. Em seguida, esses pontos são unidos por segmentos de reta, formando um novo triângulo equilátero no centro, além de outros três triângulos idênticos: um na parte superior e dois na parte inferior. Para concluir a primeira iteração do triângulo de Sierpinski, deve-se remover o triângulo central; o que corresponde a colori-lo no caso de uma construção realizada em ambiente virtual.

Seguindo os princípios da autossimilaridade e da complexidade infinita, a segunda iteração consiste em repetir o procedimento para cada um dos três triângulos remanescentes, ou não coloridos. Na Figura 2, pode-se observar o triângulo de Sierpinski construído, até a quinta iteração, por um dos alunos.

Após a construção do fractal com o auxílio do GeoGebra, os alunos elaboraram uma tabela com as medidas dos lados dos triângulos obtidos após cada iteração. Para o triângulo inicial, definiu-se como padrão a medida de 8 unidades de comprimento (u.c.). Após a primeira iteração, cada triângulo passa a ter lado medindo 4 u.c. Após a segunda iteração, 2 u.c. Realizada a terceira iteração, o lado de cada triângulo obtido passa a ser 1 u.c. E assim por diante.

Figura 2 - Quinta iteração do triângulo de Sierpinski.



Fonte: Os autores (2025).

Dando sequência à atividade proposta, os alunos escreveram as razões entre as medidas dos lados dos triângulos obtidos em iterações consecutivas. Após simplificá-las, foi possível observar que todas eram equivalentes, conforme indicado abaixo, deixando clara a existência de uma igualdade entre razões.

$$\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

Diante disso, os alunos puderam compreender o significado de uma proporção e identificá-la geometricamente na estrutura do fractal, percebendo que as medidas dos lados dos triângulos equiláteros diminuem pela metade após cada iteração, ou seja, decrescem na razão de 2 para 1. Visto que as discussões propostas em sala de aula se desenvolveram a partir de uma construção elaborada pelos próprios alunos, pode-se afirmar que a aprendizagem sobre o conceito de proporção ocorreu de forma significativa, pois, conforme afirma Lorenzato (2010), a experimentação é o melhor método para se conseguir aprendizagem com significado, permitindo que o aluno participe de descobertas, levante hipóteses e busque alternativas.

O mesmo pode ser dito em relação ao tapete de Sierpinski: considerando que os alunos participaram ativamente da construção do fractal, a resolução de equações do tipo $ax^2=b$ teve mais significado e, de forma geral, foi facilmente compreendida. Além disso, cabe destacar a relevância da utilização do GeoGebra, sem o qual seria extremamente difícil construir ambos os fractais, devido à grande quantidade de detalhes e a necessidade de precisão nas medidas.

CONCLUSÕES

Diante do exposto no presente relato de experiência, percebe-se que a geometria fractal pode ser uma alternativa interessante para explorar diferentes objetos de conhecimento da Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. As equações do tipo $ax^2=b$ e a ideia de proporção são apenas dois deles; muitos outros podem ser abordados a partir do tapete e do triângulo de Sierpinski.

Em relação aos recursos tecnológicos digitais, fica evidente que, quando empregados de maneira adequada, estes podem se tornar grandes aliados no ensino da Matemática. Em especial, destaca-se a facilidade de acesso e utilização do *software* GeoGebra, o qual dispõe de um interessante contingente de recursos que viabilizam a exploração de, praticamente, qualquer conceito matemático presente na educação básica.

Por fim, acredita-se que a abordagem da geometria fractal nas aulas do 8º ano permitiu que os alunos aprendessem Matemática de uma forma não tradicional, a qual, nesse caso, mostrou-se bastante positiva. A partir de um contexto rico em elementos visuais, os alunos puderam ampliar seu repertório matemático e explorar importantes objetos de conhecimento de maneira criativa.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Thiago Albuquerque de *et al.* Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 1-10, 2008.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria fractal:** perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

ENGELKIN, Ryszard. Waclaw Sierpinski (1882-1969): his life and work in topology. In: AULL, C. E.; LOWEN, R. (org.). **Handbook of the History of General Topology**. Kluwer Academic Publishers, 1998, v. 2, p. 399-414.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender Matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. 140 p.

LUCIANO, Karina Maria da Fonseca. GeoGebra como opção metodológica. **Cadernos do IME - Série Matemática**, n. 12, p. 26-38, 2018.

SOUZA, Caio Henrique Silva de; CLEMENTE, Gabriel Longatto. Fractais: figuras de outra dimensão - Parte I. **Acta Legalicus**, n. 29, p. 1-22, 2020.

Trabalho desenvolvido com o 8º ano da Escola Municipal Fundamental João Goulart, pelos alunos: Anderson Gustavo Krawczuk dos Santos; Arthur Mathias Vieira Bairros; Aryel Falcão de Oliveira; Emanueli de Abreu da Silva; Emily da Rosa Ribeiro; Guilherme Dutra; Henrique Secco Cabreira; Isabelly Valentina dos Santos Rodrigues; Jeferson Maian Etchechurry Martins; Kaio William Padilha de Oliveira; Kethlyn Gabriele da Silva Fernandes; Laura Luisa de Oliveira Ribeiro; Leonardo Marques da Silva; Natanael Natan Rodrigues da Silva; Stefany de Freitas Silva.

Dados para contato:

Expositor: Anderson Gustavo Krawczuk dos Santos; **e-mail:** andergusksantos@gmail.com;

Expositor: Leonardo Marques da Silva; **e-mail:** l77167126@gmail.com;

Professor Orientador: Marcelo Wachter Maroski; **e-mail:** marcelo.m@prof.smed.ijui.rs.gov.br.