ONDULATÓRIA DO MOVIMENTO PENDULAR SIMPLES[1]

SCHERER, Lucas Bastos Otero[2]; PERSSON, Robson[3]; GABBI, Ana Carla Streit[4]

RESUMO: No presente trabalho é feito um estudo das variações periódicas, relacionadas à velocidade pontual e à própria posição da massa pendular, de um pêndulo simples, associando tais variações a funções trigonométricas cuja variável independente é horária. Para realizar a dedução das funções horárias que descrevem as variações de velocidade linear, momento angular, aceleração centrípeta, energia cinética, e a própria posição espacial da massa pendular, utilizou-se de um modelo matemático fundamentado na mecânica clássica e representações gráficas usuais. Também foram diferenciados pêndulos que realizam movimento pendular simples MPS, de pêndulos que realizam movimento circular periodicamente variado MCPV.

Palavras-chave: Função horária. Ondulatória. Pêndulo simples. Estado de um pêndulo.

INTRODUÇÃO

Um pêndulo simples é uma massa presa por um fio ideal a um ponto fixo e que uma vez posto em movimento ao ser solto de uma posição fora de seu ponto de repouso ou equilíbrio estável, permanecerá eternamente realizando oscilações num único plano numa condição ideal, pelo principio de inércia de Newton, atuando sobre ele apenas a força da gravidade cuja aceleração é g.

Um pêndulo realiza um movimento característico, diferente de um movimento circular uniforme MCU, ou um movimento harmônico simples MHS (esse uma projeção do MCU, sobre um eixo unidimensional); sendo por isso mais difícil determinar o estado em que se encontra a massa pendular em um dado instante de tempo, tal estado diz respeito a grandezas relacionadas à velocidade de m, das quais são aqui apresentadas, a velocidade linear, momento angular, aceleração centrípeta e energia cinética instantâneas de m, que embora mais difíceis de determinar, são previsíveis devido à periodicidade rigorosa do pêndulo.

MATERIAL E MÉTODOS

Para podermos mensurar e medir as variações de posição e estado de um pêndulo simples em função do tempo partimos de um modelo matemático, descrito abaixo, capaz de representar a abstração das variações de estado e posição da massa pendular m, para então descritas as funções horárias conseguir relacionar os dados oferecidos pelo modelo com um pêndulo real. A partir desse modelo baseado em conceitos de mêcanica clássica, associado a leitura de dados matemáticos e dedução de fórmulas, atingimos os resultados descritos e esplicitados para apreciação e reprodução, por quem vier a testá-lo.

---

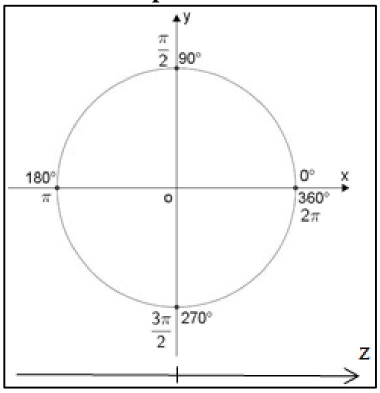
[1] Categoria: Ensino Médio; Modalidade: Matemática Aplicada; Instituição: Colégio Tiradentes da Brigada Militar de Ijuí

[2] Aluno da 2ª série do Ensino Médio, lucasb.o.s.2001@hotmail.com

[3] Aluno da 2ª série do Ensino Médio, robsonpersson@gmail.com

[4] Professora Orientadora, Colégio Tiradentes da Brigada Militar de Ijuí, anasgabbi@gmail.com

Figura 1- Modelo matemático para estudo do movimento pendular.



Fonte: Os autores (2017)

Graficamente como pode ser visto na figura 1, esse modelo matemático consiste em um ciclo trigonométrico, que permite conhecer a posição de *m*, já que *O* corresponde ao pivô do pêndulo, e o raio do circulo é equivalente ao comprimento do fio ligante do pêndulo, as elongações das projeções sobre os eixos *x* e *y*, são medidas em raios *r*, variando de 0 a 1.

Não apenas os valores de *x* e *y* encontram-se entre 0 e 1, todas as grandezas envolvidas são tratadas em termos absolutos com valor mínimo nulo (zero), e valor máximo 1 (100%), os sinais + e -, tem a única função de discriminar sentido para as grandezas vetoriais e posição para o caso das projeções nos eixos *x* e *y*, sendo a correspondência com os valores reais de estado de cada pêndulo, dada pela multiplicação da fração B (cuja dedução está presente mais adiante), por uma série de variáveis específicas a cada uma das grandezas estáticas.

O eixo *z* atravessa ortogonalmente o plano descrito, e indica o momento angular (além da aceleração e velocidade angulares, as quais não são aqui estudadas) de *m* para cada um dos pares (*x*, *y*) possíveis, e considerando os dois sentidos de movimento possíveis.

Os símbolos θ_0 e θ, dão respectivamente as posições radiais, inicial e qualquer de *m*.

Vale notar que pêndulos com posição inicial $\theta_0 = \pi/2$, não realizam MPS (caracterizado pelo efeito vaivém), mas sim um MCPV, sendo necessário que possuam uma velocidade mínima não nula para transpor o ponto de equilíbrio instável $\theta = \pi/2$, para efeito de cálculos é considerado no modelo matemático que a velocidade varia para todos os pêndulos entre 0 e 1, sendo necessário que o valor de aceleração centrípeta, momento angular, velocidade e energia cinética iniciais ou mínimos sejam adicionados aos valores oferecidos pelo modelo matemático para correspondência com o pêndulo real, conforme o que é apresentado nas funções.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Partindo do pressuposto de que o pêndulo possui uma grandeza de estado nula em sua posição inicial e uma máxima quando no ponto $\theta = 3\pi/2$, podemos determinar a fração de qualquer uma dessas grandezas num ponto θ qualquer a partir do principio de transformação recíproca entre energias cinética e potencial gravitacional. Na equação abaixo Δh é a variação de altura 1 (um), entre a posição inicial e o ponto de equilíbrio estável, dada por:

$\Delta h = r\,(1 + sen\,\theta_0)$, ou

$\Delta h = rH,\ H = 1 + sen\,\theta_0$

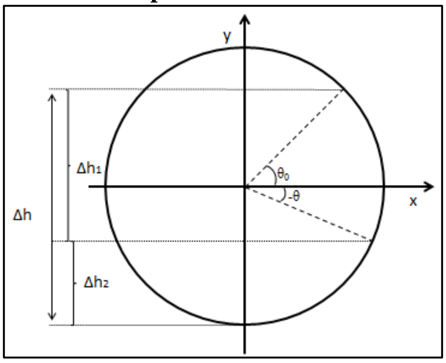
A utilização da variável H deve-se a frequência com que ela aparece nas funções.

As outras variáveis são Δh_1 a altura já percorrida pela massa m e Δh_2 a altura a ser percorrida por m. Podendo ser mais bem entendidas através das equações e da figura abaixo.

$\Delta h_1 = \Delta h - \Delta h_2$

$\Delta h_2 = r\,(1 + sen\ \theta)$

Figura 2- Variáveis presentes no cálculo da fração B.



Fonte: Os autores (2017).

A fração B das grandezas de estado é dada a partir da razão de Δh_1 sobre Δh.

$B = \Delta h_1/\Delta h = (\Delta h - \Delta h_2) \div \Delta h \therefore B = (sen\ \theta_0 - sen\ \theta) \div H$

Segue as funções das grandezas de estado em função de B.

$f: B \rightarrow v$

$Ec = Ep$

$\cancel{m}v^2/2 = \cancel{m}gh$

$v^2/2 = gh$

$v^2 = 2gh;\ h = Br$

$v = \sqrt{2grB}$

Para $\theta_0 = \pi/2$:

$v = \sqrt{2grB} + v_0$

$f: B \rightarrow a_c$

$a_c = v^2/r$

$a_c = 2gh/r$

$a_c = 2g\cancel{r}B/\cancel{r}$

$a_c = 2gB$

Para $\theta_0 = \pi/2$:

$a_c = 2gB + a_{c0}$

A direção de $\vec{v}$ é dado por uma reta tangente à trajetória, onde se localiza instantaneamente a massa m, seu sentido é o mesmo do movimento, já $\vec{a_c}$ é sempre perpendicular a $\vec{v}$, e orientado para o centro O. Assim como o vetor posição $\vec{r}$, que aparece adiante e cujo módulo é r.

$f: B \rightarrow z$

$\vec{L} = m\vec{v}\vec{r}$

$L = mvr$

$L = mr\sqrt{2grB}$

Para $\theta_0 = \pi/2$:

$L = mr\,(\sqrt{2grB} + v_0)$

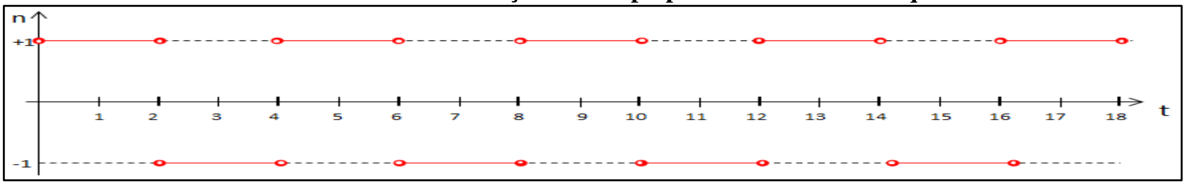
$L = |z|$

O sentido do momento angular para um pêndulo com $\theta_0 = \pi/2$, é constante e possuí mesmo sentido do momento angular mínimo ou inicial L_0.

Já o sentido momento angular para pêndulos com $\theta_0 \neq \pi/2$, é dado em função do tempo e do cosseno do ângulo da posição inicial de acordo com a função abaixo. Os gráficos oferecem o valor de *n* em função do tempo e do cosseno (projeção sobre o eixo *x*) de θ_0.

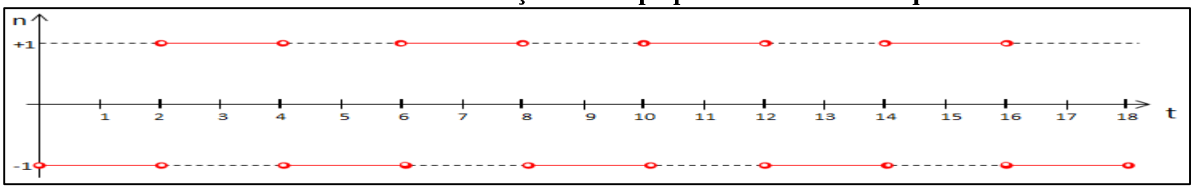
z = n(L)

Gráfico 1- Valor de n em função do tempo para x inicial menor que zero.



Fonte: Os autores (2017).

Gráfico 2- Valor de n em função do tempo para x inicial maior que zero.



Fonte: Os autores (2017).

$f: B \rightarrow Ec$

$Ec = mv^2/2$

$Ec = m\cancel{2}grB/\cancel{2}$

$Ec = mgrB$

Para $\theta_0 = \pi/2$;

$Ec = mgrB + Ec_0$

Contudo tais funções possuem pouca aplicação se não for possível relacioná-las com a variação do tempo. Para tanto utilizamos da função $t_{(B)}$ para determinar a variação de tempo Δt, do instante em que *m* partiu da posição inicial até chegar a uma posição arbitrária θ, anterior ao ponto de repouso. Relacionamos então essa variação de tempo com o seno do ângulo posição (*sen* θ). Apesar de essa equação ser apenas aplicável até a massa pendular atingir a posição $\theta = 3\pi/2$, pudemos através de método de tabelamento estipular os pares ordenados seguintes, os quais foram dispostos num gráfico, com o qual a partir do seu comportamento foi determinada a função de *sen* θ em função do tempo *t*, sendo $t_0 = 0$.

Lembrando que o tempo é dado em valor adimensional, segundo o modelo matemático sendo que sua conversão para unidades de medida usuais como segundos ou minutos, obedece as equações abaixo, nas quais *T* é a duração de um período de oscilação ou giro.

Para $\theta_0 = \pi/2$:

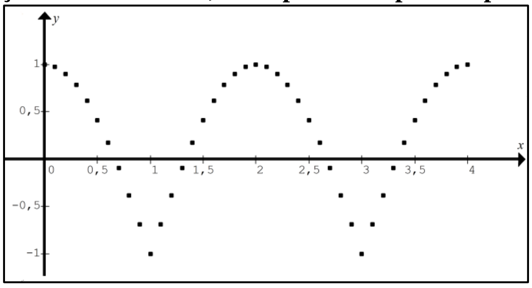
$t = T/2$

Para $\theta_0 \neq \pi/2$:

$t = T/4$

$f: B \rightarrow t$
$\Delta v = g\Delta t$
$v = gt$
$v = \sqrt{2grB}$
$gt = \sqrt{2grB}$
$t = \sqrt{2grB} \div g$
$t = (\sqrt{2gr} \div g) \times \sqrt{B}$

Gráfico 3- Representação gráfica de uma função de sen θ em função do tempo, para um pêndulo com posição inicial $\theta_0 = \pi/2$, cada ponto é separado por 0,1t.



Fonte: Os autores (2017).

$f: t \rightarrow sen\ \theta$
$sen\ \theta = |H \cos(\pi/2 \times t)| - 1$

Para determinar os valores de *x* e *y*, num instante qualquer de tempo, faz-se uso das equações abaixo, onde o valor de n é o mesmo determinado pelos gráficos determinantes do valor de n para o cálculo de z, e *sen θ* é dado pela função acima.

$y = r \times sen\ \theta$
$\cos^2 \theta = 1 - sen^2\ \theta$
$\cos \theta = \pm\sqrt{(1 - sen^2\ \theta)}$
$x = r(-n) \times \cos \theta$

CONCLUSÕES

O movimento e as propriedades matemáticas dos pêndulos são objeto de estudo frequente de físicos e matemáticos. Utilizados para estudar fenômenos da natureza como, a rotação da terra, a atuação da gravidade, a conservação da energia em choques elásticos.

Conclui-se que, mais importante que estudar puramente as propriedades e movimentos pendulares, como as funções horárias presentes nesse trabalho, é abrir possibilidades para que através desses conhecimentos, seja possível compreender fenômenos diversos, sejam naturais ou humanos, cujo comportamento se assemelha ao de um pêndulo, como o movimento orbital dos planetas que pode ser associado a um pêndulo que realiza um MCPV.