A RAZÃO ÁUREA EM UM CASO DE NÃO CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS[1]

MAROSKI, Marcelo Wachter[2]; PIVA, Claudia[3]

RESUMO: O presente trabalho, que é fruto de uma atividade desenvolvida com acadêmicos do curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) através das ações de um projeto de extensão, propõe a discussão de um problema de não congruência de triângulos, cuja solução está diretamente relacionada à razão áurea: um tópico importante da Matemática que há muitos séculos vem despertando o interesse do ser humano. Através da resolução do problema proposto, pretende-se explorar a riqueza de alguns conceitos matemáticos, visto que a solução almejada considera o emprego de um extenso ferramental, envolvendo saberes dos diferentes campos da Matemática pura. Além disso, o estudo de uma das tantas aplicações possíveis para a razão áurea permite ampliar as discussões sobre tal conceito matemático, atualmente pouco explorado na Educação Básica e nos cursos de nível superior.

Palavras-chave: Número áureo. Geometria. Progressão Geométrica. Resolução de Problema.

INTRODUÇÃO

Há mais de vinte séculos, desde a escola pitagórica, a razão áurea tem sido ponto de interesse para muitos matemáticos (HUNTLEY, 1985, p. 36) por se tratar de um conceito que possui diversas aplicações, tanto em situações internas da própria Matemática quanto em formas da natureza.

A razão áurea, identificada pela letra grega φ (fi), é uma constante irracional cujo valor exato é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e o aproximado, 1,61803 (HUNTLEY, 1985, p. 37), sendo que sua origem está relacionada à secção de segmentos de reta.

Seja AB um segmento de reta de medida a. Se um ponto C divide AB nos segmentos AC e CB, de medidas b e c, respectivamente, de modo que vale a proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, então, diz-se que C divide AB de acordo com a razão áurea. (ÁVILA, 1985, p. 11).

Uma das aplicações do número áureo na geometria dá-se em um caso de não congruência de triângulos, a partir de um problema muito interessante, retirado de Murari e Barbosa (1990), que pode ser enunciado da seguinte maneira: "É possível que dois triângulos tenham cinco pares de elementos congruentes e não sejam congruentes entre si?".

Assim, propõe-se explorar a riqueza dos conceitos matemáticos desse problema, em cuja resolução aparecerá a razão áurea: principal objeto de estudo deste trabalho.

MATERIAL E MÉTODOS

O presente trabalho surgiu a partir de uma demanda do curso de Matemática – Licenciatura da UNIJUÍ de desenvolver uma atividade com os acadêmicos, considerando um tópico pouco conhecido por eles. Assim, através do projeto de extensão Desenvolvimento e

---

[1] Categoria: Ensino Superior; Modalidade: Matemática pura; Instituição: UNIJUÍ
[2] Acadêmico do curso de Matemática – Licenciatura/Bolsista PIBEX, marcelomaroski@gmail.com
[3] Professora orientadora, UNIJUÍ, claudiap@unijui.edu.br

Implementação de *Software* Educacional para a Área de Matemática Voltado para as Escolas da Rede Pública (DISEAM), propôs-se uma oficina na qual propôs-se a resolução do problema apresentado anteriormente como forma de introdução ao conceito de razão áurea.

Cabe destacar o ferramental matemático que necessita ser empregado para solucionar esse problema, que, apesar de um enunciado simplista, possui uma resolução complexa, envolvendo os conceitos de: casos de congruência de triângulos, semelhança de triângulos, permutação simples, condição de existência de um triângulo, progressão geométrica, resolução de inequações de segundo grau e estudo do sinal de uma função quadrática.

Assim, a parte de Matemática pura da referida oficina será aqui reproduzida e discutida, empregando todos os conceitos de Matemática básica supracitados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para resolver o problema, inicialmente, é preciso identificar que cada triângulo possui seis pares de elementos: três lados e três ângulos. Portanto, cabe descobrir quais são os cinco pares de elementos congruentes e qual par não é.

Para isso, recorrer-se-á aos casos de congruência de triângulos: LLL (Lado – Lado – Lado), LAL (Lado – Ângulo – Lado), ALA (Ângulo – Lado – Ângulo) e LAA_o (Lado – Ângulo – Ângulo Oposto). Pelo primeiro dos casos: se dois triângulos têm os três pares de lados congruentes, então os três ângulos também o são e, assim, os triângulos são congruentes entre si. Portanto, para atender às condições do problema, os dois triângulos devem ter dois pares de lados e três pares de ângulos congruentes e um par de lados não congruente.

De acordo com a condição de semelhança de triângulos, “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.”. (DOLCE; POMPEO, 2013, p. 192). Logo, por essa definição, sabe-se que os triângulos do problema são semelhantes.

Sendo a, b e c os lados do primeiro triângulo e a, b e d os lados do segundo, em que a e b são lados congruentes, então cabe descobrir quais são os pares de lados que, sendo homólogos, atendem às condições do problema.

Fixando-se os lados do primeiro triângulo, pode-se permutar os lados do segundo, a fim de testar todas as razões de semelhança possíveis. Por meio do ferramental da análise combinatória, a permutação de três lados de um triângulo, resulta em 3! possibilidades, ou seja, 6 possibilidades. A primeira delas é:

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Nessa primeira possibilidade, as duas primeiras razões são iguais a 1, implicando que o lado c é congruente ao d, fazendo com que todos os lados sejam congruentes. Portanto, deve-se descartá-la e passar à próxima:

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{d} = \frac{c}{b} = k$$

Por essa possibilidade, tem-se $b = c$ e, portanto, $c = d$; o que também resulta na congruência dos três lados.

A terceira possibilidade de escrever a razão de semelhança é:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{c}{d} = k$$

Através dessa possibilidade, tem-se $a^2 = b^2$, logo, $a = b$. Se os lados a e b têm a mesma medida, isso implica em c = d e, novamente, os dois triângulos seriam congruentes.

A quarta possibilidade é a seguinte:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} = \frac{c}{a} = k$$

Nesse caso, não é possível fazer simplificações imediatas, o que ocorre também com a quinta possibilidade, apresentada abaixo:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = k$$

Por fim, a sexta e última possibilidade de escrever as razões de semelhança é:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = k$$

Para essa possibilidade, tem-se que $a = d$, portanto d também é igual a c, resultando na congruência não desejada entre os triângulos. Desse modo, tem-se duas possibilidades que podem solucionar o problema: a quarta e a quinta. Pelo fato de elas serem equivalentes, trabalhar-se-á apenas com a segunda delas.

A sequência da resolução do problema consiste em escrever todos os lados dos dois triângulos em função do lado a e da constante de proporcionalidade k. Assim, tem-se $b = ak$, $c = ak^2$ e $d = ak^{-1}$. Escrevendo os lados do primeiro triângulo, tem-se: (a, ak, ak^2); enquanto os lados do segundo são: (ak^{-1}, a, ak). Observando-se as sequências formadas pelos lados dos triângulos, percebe-se que elas são progressões geométricas genéricas de razão k.

Entretanto, é necessário averiguar se existem triângulos que atendem às condições impostas anteriormente, visto que não são quaisquer três medidas que constituem os lados de um triângulo, pois, de acordo com a condição de existência, o maior lado de um triângulo deverá ser menor do que a soma dos outros dois. (MURARI; BARBOSA, 1990, p. 14).

Tomando os lados do primeiro triângulo, testar-se-á a condição de existência. Porém, é necessário considerar que a razão da progressão geométrica pode ser um número maior do que 1 ou um número entre 0 e 1. Para $k > 1$, o maior lado do triângulo é ak^2 e da condição de existência resulta a seguinte inequação:

$$ak^2 < ak + a$$

Dividindo-se todos os seus membros por a, aplicando-se o método de resolução de Bhaskara e fazendo-se o estudo do sinal da função, encontra-se a seguinte solução:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para $0 < k < 1$ o maior lado passa a ser a e a inequação resultante é a seguinte:

$$a < ak^2 + ak$$

Resolvendo-a pelo mesmo procedimento citado anteriormente, chega-se à solução:

$$k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } k > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Entretanto, k deve ser um valor positivo, pois, caso contrário, os lados dos triângulos teriam medidas negativas, o que não faz sentido. Portanto, desconsiderando a parte negativa das soluções das duas inequações, obtém-se:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

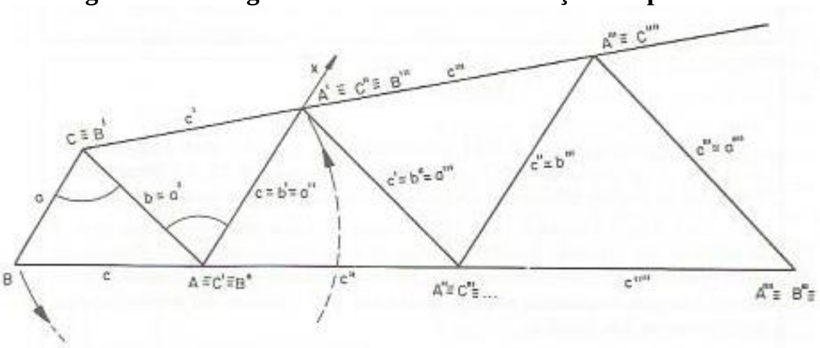
Contudo, o valor de k também não pode ser 1, pois aí a progressão geométrica seria constante, os lados dos triângulos seriam todos iguais e verificar-se-ia a congruência entre eles pelo primeiro dos casos, citado no início da resolução.

Nesse ponto, é evidente a relação entre a solução encontrada e a razão áurea, de modo que a resposta do problema pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\varphi} < k < \varphi, k \neq 1$$

Por fim, é interessante pensar em maneiras para obter tais triângulos. Uma possibilidade é a construção sugerida na Figura 1, em que cada par de triângulos que possuem um lado em comum satisfaz as condições do problema:

Figura 1 - Triângulos construídos nas condições do problema



Fonte: Murari e Barbosa (1990, p. 17).

CONCLUSÕES

Assim, através da resolução do problema apresentado, chega-se à seguinte conclusão: sim, é possível que dois triângulos tenham cinco pares de elementos congruentes e não sejam congruentes entre si, desde que a razão de semelhança entre as medidas de seus lados seja um valor diferente de 1 que esteja no intervalo entre o número áureo e o seu inverso.

É notável a quantidade de recursos matemáticos que foram utilizados para obter-se tal solução, demonstrando, assim, que o estudo da razão áurea oferece grande potencial de exploração no campo da Matemática pura.

Certamente, esse problema é apenas um exemplo de como a razão áurea está presente na geometria. Sem dúvida, existem muitas outras aplicações de tal conceito que, apesar de ser pouco explorado na educação básica e no ensino superior, consiste em uma ótima fonte de discussões matemáticas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 6, p. 9-14, 1985.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática elementar**: geometria plana. São Paulo: Atual, 2013. 456 p.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**: um ensaio sobre a beleza na Matemática. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 178 p.

MURARI, Claudemir; BARBOSA, Ruy Madsen. Divagações sobre um problema curioso. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 16, p. 13-18, 1990.