ESCHER, ARTE E MATEMÁTICA: ISOMETRIAS E PAVIMENTAÇÕES

Categoria: Ensino Superior

Modalidade: Matemática Aplicada e/ou Inter-relação com Outras Disciplinas

SANTOS, Caroline dos; SCHÜNEMANN, Edwarda; BATTISTI, Isabel Koltermann.

Instituição participantes: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Ijuí/RS.

INTRODUÇÃO

Nascido na Holanda, em 1898, Escher, famoso por suas obras inusitadas, utilizava os conceitos matemáticos relacionados ao campo da Geometria, em especial as isometrias, para a criação de suas artes gráficas. Seus trabalhos realizados na forma de quebra-cabeça, pavimentam um plano com padrões construídos a partir de figuras geométricas. Este tipo de pavimentação envolvendo diferentes combinações e figuras geométricas, que seguem determinado padrão, é conhecido como mosaico.

A arte dos mosaicos teve origem nas antigas civilizações como o Egito e a Mesopotâmia, onde nesta última foi encontrada a obra “Estandarte de Ur” (3500 a.C.) considerada, pela maioria dos historiadores, o mosaico mais antigo até então descoberto. Esta obra possui duas faces, onde uma remete cenas de guerra e a outra a vida doméstica da Suméria, antiga Mesopotâmia.

Diante do exposto, vislumbra-se a possibilidade de considerar tal tema na organização de ensino que envolve conceitos da geometria plana relacionados aos temas formas e propriedades e transformações no plano. Nesse sentido, a presente escrita tem como objetivo discutir o estabelecimento de processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos considerando aspectos das obras de Escher relacionados à pavimentação e isometrias.

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta produção se estabelece a partir da realização de uma oficina que considera alguns aspectos das obras de Escher. As discussões propostas consideram aspectos apresentados, especialmente, pelos autores: Wagner (1993), Polya (1995) e Mendes (2008).

A referida oficina teve como título Escher, Arte e Matemática: Isometrias e Pavimentações. Foi desenvolvida como uma das atividades da programação da Semana Acadêmica das Licenciaturas, da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí, envolvendo cerca de 25 alunos do Curso de Matemática – Licenciatura, da mesma instituição. Consistiu na proposição de um problema inicial que proporcionou a visualização de polígonos que permitem uma pavimentação lado-lado, e, a partir destes, a construção de novas figuras com a mesma área, através da utilização de isometrias, para então serem construídos os mosaicos de Escher. O tempo de duração da oficina foi de aproximadamente uma hora e trinta minutos, envolvendo conceitos matemáticos como polígonos regulares, ângulo, vértice, lados de um polígono e isometrias, os quais contribuíram na compreensão da construção de mosaicos por Escher em suas obras de arte.

A oficina "Escher, Arte e Matemática: Isometrias e Pavimentações" iniciou apresentando relações entre alguns conceitos que foram abordados no decorrer da mesma, tais como: geometria, procedimentos, pavimentação, mosaico, arte, criatividade e raciocínio, de modo que os acadêmicos possam compreender que pavimentação é um revestimento de uma superfície plana, e também que pode ser realizada de diversas formas, onde uma delas são os mosaicos, pavimentações que possuem determinado padrão. Existem mosaicos que podem ser encontrados na natureza e outros que são criados pelo homem. A metodologia utilizada para a sua construção envolve conceitos e procedimentos matemáticos relacionado ao campo da Geometria, da Arte e habilidades que consideram a criatividade.

O primeiro problema apresentado na oficina foi: "Qual(is) o(s) polígono(s) convexo(s) regular(es) pode(m) ser usado(s) isoladamente como padrão de uma pavimentação caracterizada como lado-lado?". Pavimentação com regiões poligonais do tipo mosaico do plano não pode haver lacunas nem sobreposições entre os polígonos. As condições impostas para tanto, são:

a) Se se dois polígonos intersectam-se, então essa intersecção é um lado ou um vértice comum;
b) A distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

No sentido exposto, uma pavimentação é lado-lado se, e somente se, todo segmento que delimita o polígono é lado comum a dois polígonos. Portanto, os vértices também são comuns entre eles.

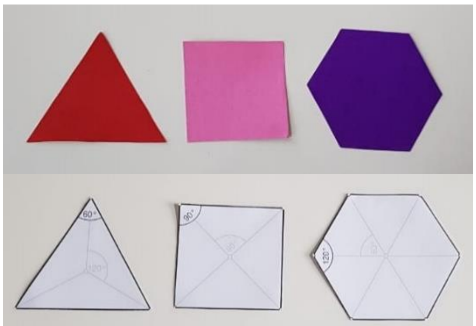
Para resolver o problema, os acadêmicos foram organizados em duplas, em que cada dupla recebia peças que representavam um dos polígonos convexos regulares representados na Figura 1. Foi proposto que cada dupla organizasse uma pavimentação lado-lado com o polígono representado pela maior face da(s) peça(s) que recebeu. Neste momento os acadêmicos deveriam identificar se tal pavimentação satisfaz as condições dadas.

Figura 1 – Polígonos convexos regulares

Fonte: As autoras (2018)

Com esta atividade, os acadêmicos perceberam que os polígonos regulares que satisfazem as condições de uma pavimentação lado-lado são: o triângulo, o quadrado e o hexágono. As percepções quanto aos polígonos convexos regulares que não atenderam às condições propostas, foram que, ao realizar a pavimentação identificaram lacunas e sobreposições entre eles.

Figura 2 – Polígonos convexos regulares que possibilitam a pavimentação lado-lado



Fonte: As autoras (2018)

Após estas constatações, as duplas anotaram o número de lados e a medida do ângulo interno do seu polígono. Os procedimentos realizados para a obtenção da medida do ângulo interno dos polígonos considerados possibilitou o estabelecimento de processos de abstração e de generalização, obtendo assim, uma fórmula que expressa, a partir do número de lados do polígono regular, a medida do ângulo interno do referido polígono. Com os dados obtidos foi elaborado um quadro, que permitiu a percepção de características comuns aos três polígonos que possibilitam a pavimentação lado-lado. As discussões a partir da análise dos dados possibilitou aos acadêmicos a constatação de que os ângulos internos do quadrado, triângulo equilátero e hexágono, são divisores de 360º.

Para a sistematização deste problema foi apresentado o vídeo "Matemática em toda parte – Construção – Pavimentação com Polígonos[1]", o qual apresenta de forma animada as pavimentações que podem ser realizadas, identificando que os ângulos entorno do ponto de encontro das figuras somam 360º.

Na sequência foi proposto um segundo problema "Apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados isoladamente como padrão de pavimentação, mas se repararmos nas imagens de Escher, não aparenta usar qualquer um destes polígonos. Aqui está um erro?". Este põe em discussão as construções do artista e problematiza a forma como tais representações foram produzidas.

Maurits Cornelis Escher nasceu na Holanda em 1898 e viveu até 1972. Conforme Veldhuysen (2013), o artista "ganhou fama internacional por suas litografias e xilogravuras inusitadas, nas quais criou quebra-cabeças visuais que exploram mundos impossíveis, imagens arquitetônicas refinadas e padrões geométricos fascinantes". (VELDHUYSEN, 2013, p.9).

Figura 3 – Ladrilhamento IV / Tessellation 1957

Fonte: Tjabbes (2013)

[1] https://www.youtube.com/watch?v=y__0a7TDbfs

Para compreender o problema, foi apresentada uma técnica que pode ser utilizada nas referidas construções. Assim, a partir de um hexágono regular foram consideradas ideias relacionadas à isometrias.

Conforme Wagner (1993), isometrias são aquelas transformações que preservam distâncias, e possuem as seguintes propriedades:

> a) A imagem de uma reta por uma isometria é uma reta.
> b) Uma isometria preserva paralelismo.
> c) Uma isometria preserva ângulos.
> Como consequência da definição, a imagem de uma figura F por uma isometria, é uma figura F’ congruente a F. (WAGNER, 1993, p. 71)

As isometrias consideradas na oficina foram: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Corroborando com Wagner (1993), a translação transforma uma figura em outra paralela e congruente, conservando uma direção, um sentido e um comprimento. A rotação é obtida através da fixação de um ponto (centro de rotação) e todos os outros se deslocam em um dado ângulo de amplitude em torno do ponto fixo, positiva quando deslocado no sentido anti-horário. A reflexão ocorre quando, ao ser traçado um eixo ou ponto de simetria, cada ponto da figura original é simétrico a figura congruente. E a reflexão deslizante segundo Lima (1996) é obtida pela reflexão seguida de translação e não possui ponto fixo.

A partir das ideias trazidas foram apresentados dois vídeos[2] de como construir mosaicos usando a técnica de Escher. Nos vídeos, a técnica parte de um dos polígonos convexos regulares que permitem a pavimentação lado-lado, onde são traçadas linhas formando figuras, em que, estas, são recortadas e sofrem uma aplicação das isometrias, formando uma nova figura de mesma área que a inicial. Estas figuras permitem uma pavimentação lado-lado, pois se encaixam perfeitamente.

A resolução do segundo problema, se dá após o entendimento de que nas obras de Escher não consegue-se visualizar os polígonos diretamente, mas compreendendo sua técnica verifica-se que utilizando as isometrias é possível criar os mosaicos. Portanto, para concluir a oficina, foi proposta uma atividade tendo como base os aprendizados obtidos na mesma. A atividade trata de uma construção de um mosaico a partir de um triângulo equilátero, onde são dados os passos a serem seguidos.

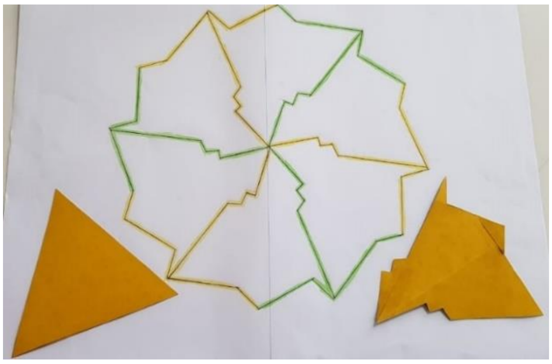
Disponibilizando-se um triângulo equilátero para cada aluno participante, o mesmo deve escolher um vértice qualquer do triângulo demarcando-o, e além disso, marcar o ponto médio do segmento do lado oposto ao vértice escolhido. Iniciando do vértice, deve-se desenhar uma

[2] http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27470

figura qualquer, que será recortada e rotacionada, considerando o vértice como ponto fixo, para seu lado adjacente. Quanto ao ponto médio, será necessário desenhar uma figura qualquer que inicie em um dos vértices do segmento e que não ultrapasse o ponto médio, utilizando o ponto pertencente ao segmento onde termina a figura como ponto fixo, deve ser rotacionada para a outra metade do segmento.

Estes procedimentos criam uma nova figura, de mesma área do triângulo equilátero inicial, que será utilizada para a construção de um mosaico fixando um centro de rotação, conforme mostra a Figura 4. Cada aluno realizou a construção do seu mosaico.

Figura 4 – Mosaico construído a partir do triângulo equilátero



Fonte: As autoras (2018)

As atividades realizadas no decorrer da oficina contemplam as quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya (1995), as quais são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto.

Além disso, consideram o uso de recursos didáticos como materiais concretos manipuláveis e uso de tecnologias que possibilitam uma melhor visualização e compreensão dos conceitos matemáticos abordados. Sendo estes, os vídeos apresentados e os materiais confeccionados.

> A informática, atualmente, é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno. Sua relação com a Educação Matemática se estabelece a partir das perspectivas metodológicas atribuídas à informática como meio de superação de alguns obstáculos encontrados por professores e estudantes no processo ensino-aprendizagem. (MENDES, 2008, p.61).

Com relação aos vídeos apresentados na oficina, possibilitaram superar a dificuldade de representação da construção de mosaicos, utilizando a técnica de Escher a partir das isometrias, que ao serem representadas por "papel e caneta" podem não ser compreendidos na mesma intensidade.

Corroborando com Mendes (2008), aquando este indica que a utilização de Materiais Concretos é uma ampla metodologia de ensino da Matemática, a qual possibilita que o aluno manipule o material e estabeleça relações, tornando-o um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático. Neste caso, o professor atua como um mediador, garantindo que o conceito matemático seja ensinado. “Isso porque a aprendizagem é um processo progressivo que não se esgota na manipulação de modelos físicos, mas nas relações manipulativo-simbólicas e abstrativas estabelecidas em cada atividade”. (MENDES, 2008, p.11).

CONCLUSÕES

Neste trabalho, concluímos que as atividades propostas no decorrer da oficina, são potenciais para o ensino dos conceitos matemáticos da Isometria. Portanto, podem ser utilizadas por professores da Educação Básica no ensino do conteúdo, pois o mesmo, pouco é trabalhado em sala de aula. A oficina considera a resolução de problemas, importante metodologia que permite a construção de relações e de aplicações dos conceitos na realidade. Além disso, o uso de materiais didáticos e de tecnologias que auxiliam na compreensão dos conceitos, ampliando possibilidades de estabelecimento de processos de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

MENDES, Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.

POLYA, G. Parte 1: Em aula. In: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. P. 1- 15.

VELDHUYSEN, Willem. M. C. Escher: O novo mestre holandês. In: TJABBES, Pieter. **A Magia de Escher**. São Paulo: Art Unlimited, 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

Dados para contato:
Expositor: Caroline dos Santos; **e-mail:** carolzinny@outlook.com;
Expositor: Edwarda Schünemann; **e-mail:** edwardaschunemann@outlook.com;
Professor Orientador: Isabel Koltermann Battisti; **e-mail:** isabel.battisti@unijui.edu.br;